

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Turing, A. M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 230—265 (1936).

The fundamental notion of this interesting paper is that of a "machine", which may be described as follows. A machine is a device supplied with a "tape" consisting of an infinite linear series of sections called "squares", and with a stock of a finite number of "symbols" which it can print on the squares; it is also capable of a finite number of settings, called "*m*-configurations". At each instant a certain square (the "scanned square") is in the machine. The machine operates by stages ("moves") each of which consists of: (1) replacing the symbol (if any) on the scanned square by a symbol from the stock (or leaving it blank); (2) taking up as new scanned square either the original square or the one immediately on its left or right; and (3) taking up a new *m*-configuration. If the moves of the machine are specified by a table of double entry so that the move from any given position is completely determined by the symbol on the scanned square and the *m*-configuration, the machine is called "automatic". Suppose now we have an automatic machine which, starting with a blank tape, prints an infinite sequence of 0's and 1's interspersed with auxiliary symbols; the sequence of 0's and 1's (apart from the auxiliary symbols) will then be the dyadic expansion of a certain real fraction; this fraction is said to be computed by the machine, and a number differing by an integer from such a fraction is defined as a computable number. The author argues heuristically that this definition agrees with our intuitions, and he enunciates a number of theorems concerning it. Among the more interesting of these are the following. Computability is equivalent to λ -defineability in the sense of Church, and so to the general recursiveness of Gödel-Herbrand-Kleene (see e.g. Kleene, this Zbl. 14, 385 and 194); it is also equivalent to a certain type of defineability in the restricted functional calculus. There is a definition of computable function, and of computable convergence; and in terms of these it is stated that between any computable values with opposite signs of a computable continuous function there is a computable zero. If the coefficients of a power series form a computable sequence, then the sum is a computable function throughout the interval of convergence. Hence π , e , all real algebraic numbers, the real zeros of the Bessel functions, etc. are computable. Again, the computable numbers are enumerable. There is a certain "universal machine" which, when supplied with a tape bearing the description, in a certain standard form, of any given machine, computes the same number as that machine. On the other hand there are defineable numbers which are not computable; the application of the diagonal process to the enumeration of all computable numbers yields such a number. Finally there is no computable Entscheidungsverfahren for the restricted logical calculus. It is to be regretted that many of these theorems are stated without adequate proofs; the reviewer is unable, in the time available, to supply proofs for all of them, but he sees no reason to doubt their accuracy (except for misprints). (For related papers see Post, this Zbl. 15, 193, and Church, this Zbl. 14, 98, 385 and 15, 339. The paper appears to have been written without knowledge of Church's work, an appendix being added during printing to show the connection with λ -defineability.) H. B. Curry.

Church, Alonzo: A bibliography of symbolic logic. J. Symbolic Logic 1, 121—216 (1936).

This list mentions the papers of more than 500 authors on symbolic logic and related

topics such as Boolean algebra, the paradoxes, the Zermelo axiomatic set theory and intuitionism, beginning with Leibniz and ending with the papers published in 1935. To many titles a citation showing the subject of the paper is joined. Relatively few papers, important for subject matter or expository value, are marked by *, resp. †. About a dozen of these, in which a new idea appears for the first time, have received a **, distinguishing such names as Boole, Frege, Hilbert, Russell, Zermelo, Brouwer and Gödel.

A. Heyting (Enschede).

Wajsberg, M.: *Metalogische Beiträge*. Wiadom. mat. 43, 131—168 (1937).

Für die Aussagenlogik, die allein auf der Implikationsverknüpfung basiert, wird in § 1 eine Reihe neuer Axiomen- und Schlußregelsysteme angegeben, so z. B. in Erweiterung des Tarski-Bernaysschen Axiomensystems das Axiomensystem $C^*CpqCCqrCpr$, $C^*CCpqqp$, C^*pC^*qp , wo $C^*\alpha\beta$ für eine Formel der Gestalt $C\alpha C\alpha \dots C\alpha\beta$ steht, und das System, das aus dem Tarski-Bernaysschen hervorgeht, wenn man darin das Axiom $CCCpqqp$ durch die Regel ersetzt: mit $CCpqp$ gelte p . — Unter „Transformation“ der Aussagenfunktion N (Negation) in einer gegebenen Aussagenmenge X versteht der Verf. die Ersetzung jedes Formelbestands der Gestalt $N\alpha$ durch eine bestimmte andere Aussage $\varphi(\alpha)$; in § 3 werden hinreichende Bedingungen für solche Transformationen angegeben, die die N -freien Formeln der Folgerungsmenge von X nicht ändern. — Weitere Paragraphen enthalten ein Axiomensystem für die durch ein „Falschheits“-Symbol erweiterte Implikationslogik, einige Unabhängigkeitsmatrizen und die Vollständigkeitsbeweise für eine Reihe von Axiomensystemen für Implikations- und Äquivalenzlogik, die der Verf. in Mh. Math. Phys. 39, H. 2 aufstellte.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

● Hermann, Grete, E. May und Th. Vogel: *Die Bedeutung der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis*. Leipzig: S. Hirzel 1937. VIII, 210 S. RM. 6.50.

Das vorliegende Buch vereinigt die drei im Jahre 1936 preisgekrönten Bearbeitungen der folgenden Preisaufgabe der Richard-Avenarius-Stiftung: „Welche Konsequenzen haben die Quantentheorie und die Feldtheorie der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis?“ In der Beantwortung dieser Frage ergeben sich infolge der Verschiedenheit der philosophischen Grundauffassungen der Verff. zum Teil erhebliche Unterschiede. — Aus den Darlegungen von Grete Hermann spricht in einer sehr vorsichtigen und kritisch abgeschwächten Form die Kantsche Idee von der Apriorität der Kausalität und der klassischen Vorstellungen von Raum und Zeit. Bezüglich der Gesetzlichkeit in der modernen Physik entwickelt die Verf. im Anschluß an ihre Arbeit „Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik“ (Abh. d. Friesschen Schule 6) den Gedanken, die Quantenphysik weise zwar prinzipiell unüberwindbare Schranken der Vorausberechenbarkeit zukünftiger Ereignisse auf, sie halte aber an der unbeschränkten Anwendbarkeit des Kausalprinzips fest, demzufolge jeder Naturvorgang in allen physikalisch feststellbaren Merkmalen durch frühere Vorgänge verursacht sei, d. h. mit Notwendigkeit auf sie folge. Die Quantenphysik gebe nämlich auch für nicht vorhersagbare Erscheinungen nachträglich kausale Erklärungen an, die ihrerseits nicht etwa inhaltslos seien, sondern durch neue Voraussagen überprüft werden könnten. — Was andererseits die Theorie von Raum und Zeit angeht, so lehre die Relativitätstheorie allerdings, daß eine absolute Anwendung räumlicher und zeitlicher Maßverhältnisse nicht möglich sei; im übrigen aber behielten die klassischen Anschauungen des Raumes und der Zeit durchaus ihre Bedeutung; sie gingen nämlich in die physikalische Charakterisierung der Inertialsysteme und damit in jede Maßbestimmung mit ein. — So seien durch die moderne Physik im Grunde weder die Kausalvorstellungen noch die Raum- und Zeitvorstellungen als revisionsbedürftig erwiesen, sondern nur die „Voraussetzung von absoluten Charakter der Naturbetrachtung“, derzufolge die Naturgesetze mit Hilfe raumzeitlicher Modellvorstellungen eindeutig und adäquat beschrieben und als streng kausal determiniert dargestellt werden können. — Die Untersuchungen von E. May, die durch phänomenologische Gedankengänge und besonders durch Ideen von H. Driesch beeinflusst sind, gehen von der Ansicht aus, die mathematische Naturwissenschaft beschränke sich auf die Untersuchung des Meßbaren; da nun jede ihrer Messungen schließlich auf Längenmessungen oder Zählungen zurückgehe, so schalte die mathematische Physik alle „Soseins“-Unterschiede zwischen den Gegenständen aus und habe es schließlich nur noch mit „an und für sich unterschiedslosen“ Größen zu tun, die sie durch mathematisch formulierbare Gesetze zu verknüpfen suche. Die Grundgedanken der breit angelegten und vielfach verzweigten Darlegungen des Verf. können nun wie folgt angedeutet werden: Was das Raum-Zeit-Problem betrifft, so sei es zulässig, in den Formalismus der mathematischen Naturwissenschaften ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum einzuführen und Nicht-Euklidische Geo-

metrie vorauszusetzen; so gelange man zu einem Schema, das derzeit „das Verhalten großer Massen vollständig und, auf die einfachste Weise“ beschreibt“. — Außerhalb und schon vor der mathematischen Naturwissenschaft aber gebe es ein reines, unverbesserbares Bedeutungswissen um die So-seins-Beschaffenheit des Raumes und der Zeit; dies Wissen (nicht etwa nur die Raumanschauung unserer Alltagserfahrung) lehre u. a., daß der Raum als Ordnung des Nebeneinander notwendig euklidisch sein müsse (die Axiome der Euklidischen Geometrie werden als synthetische Urteile a priori bezeichnet) und daß die klassische Vorstellung der „absoluten Zeit“ und der Gleichzeitigkeit außerhalb des mathematischen Formalismus der Physik ihre Bedeutung behielten. — Bezüglich des Kausalproblems vertritt der Verf. die Auffassung, daß die Quantenphysik das Kausalprinzip nicht erschüttere (es sei überhaupt empirisch weder zu beweisen noch zu widerlegen), sondern lediglich vor einer Anwendung des Kausalpostulats an falscher Stelle warne; im Anschluß an Ideen von G. Hermann wird dabei das Kausalprinzip begrifflich von der mehr besagenden These der Vorausberechenbarkeit getrennt. — Auf zahlreiche weitere Erörterungen des Verf. kann hier nicht eingegangen werden. Insgesamt verneint der Verf. das Bestehen von erkenntnistheoretischen „Konsequenzen“ der modernen Physik, ja er bestreitet eine solche Möglichkeit von vornherein, da erkenntnistheoretische Grundlagenfragen vor aller einzelwissenschaftlichen Begriffs- und Theorienbildung zu behandeln seien. — Die Arbeit von Th. Vogel ist merklich durch L. Wittgensteins „Tractatus logico-philosophicus“ und durch die Untersuchungen des (von E. May heftig kritisierten) Wiener Kreises beeinflusst. Sie ist demgemäß weniger an einer philosophischen Erörterung der Geltung des Kausalprinzips und der klassischen Raum-Zeit-Lehre (die letztere und ihr Zusammenhang mit der Relativitätstheorie wird gar nicht berührt) als an einer Analyse der logischen Struktur der modernen Physik interessiert; der Verf. gibt insbesondere eine Charakterisierung der Quantenphysik als eines Kalküls und untersucht die „Zuordnungsdefinitionen“, die dessen Anwendung vermitteln. Bei der Erörterung der Kausalität wird — nach einer Kritik am Apriorismus — ein erster Ansatz gemacht, um „Determinismus“ als eine semantische Eigenschaft einer Sprache zu interpretieren (diese Eigenschaft kommt dann der durch die Quantenphysik dargestellten Sprache nicht zu). Die Arbeit ist ein interessanter Beitrag zur syntaktischen bzw. semantischen Wendung der sog. philosophischen Probleme der modernen Physik.

C. G. Hempel (Bruxelles-Forest).

Hartmann, M.: Die Kausalität in Physik und Biologie. S. B. preuß. Akad. Wiss. 1937, XXXIX—LIII.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Cherubino, Salvatore: Sulle matrici permutabili con una data. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 7, 128—156 (1936).

A construction is given for the most general matrix with complex elements commutative with a given matrix, based on a reduction to canonical form recently obtained by the author (this Zbl. 14, 338) without making use of elementary divisors. A number of special cases are discussed, such as the most general orthogonal matrix commutative with a given symmetric matrix. The method leads to a new proof of Frobenius' theorem on the characteristic roots of $f(A_1, \dots, A_p)$ where the A 's are commutative in pairs.

MacDuffee (Madison).

Ledermann, Walter: On an upper limit for the latent roots of a certain class of matrices. J. London Math. Soc. 12, 12—18 (1937).

Let $A = [a_{\nu\mu}]$ be a real or complex $n \times m$ matrix having at most s non-vanishing elements in each column, and suppose that $\sum_{\mu} |a_{\nu\mu}|^2 = h_{\nu}$. Then every latent root of the Hermitian matrix $A\bar{A}'$ is \leq the sum of the s greatest of the h_{ν} .

MacDuffee.

Hadamard, Jacques: Observations sur la note précédente. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 399 (1937).

Vgl. das Referat über eine Note von M. Krasner und B. Ranulac, dies. Zbl. 15, 386.

N. Tschebotarow (Kasan).

Rohrbach, Hans: Ein Identitätssatz für Polynome. J. reine angew. Math. 177, 55—60 (1937).

Der Beweis des folgenden schon von H. Hasse bei Untersuchungen über Kongruenzzetafunktionen benötigten Satzes: Es sei

$$f(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_m), \quad g(z) = (z - \beta_1) \dots (z - \beta_m),$$

$$f_r(z) = (z - \alpha_1^r) \dots (z - \alpha_m^r), \quad g_r(z) = (z - \beta_1^r) \dots (z - \beta_m^r).$$

Sind entweder alle $|\alpha_i| > 1$, $|\beta_i| > 1$ oder alle $|\alpha_i| < 1$, $|\beta_i| < 1$ und gilt für hinreichend großes N $f_r(1) = g_r(1)$ ($r = 1, 2, \dots, N$), so ist $f(z) = g(z)$. Es genügt dabei, für N die Zahl $2^{s-1}(2^{m+1} - 3)$ zu nehmen, wo m die Maximalzahl von absolut gleichen unter den α_i ist. N. Tschebotaröw (Kasan).

Zariski, Oscar: Generalized weight properties of the resultant of $n + 1$ polynomials in n indeterminates. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 249—265 (1937).

Es seien $f(y) = \sum a_i y^{n-i}$ und $g(y) = \sum b_j y^{m-j}$ zwei Polynome in y vom Grade n bzw. m . Gibt man nun jedem a_i das Gewicht $\text{Max.}(r - i, 0)$ und jedem b_j das Gewicht $\text{Max.}(s - j, 0)$, wobei $r \leq n$ und $s \leq m$ beliebig ganzzahlig sind, so hat in der Resultante $R(f, g)$ jedes Glied ein Gewicht $\geq rs$. Die Summe der Glieder vom Gewicht rs ist Produkt von zwei Resultanten von Teilpolynomen kleineren Grades. Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar der bekannte Satz, daß ein Schnittpunkt zweier ebener Kurven, der ein r -facher Punkt der einen und ein s -facher Punkt der anderen Kurve ist, als Schnittpunkt mindestens die Multiplizität rs hat (und genau rs , wenn keine gemeinsame Tangente vorhanden). Ein entsprechender Satz wird für die Resultante von $n + 1$ Polynomen in n Veränderlichen aufgestellt und auf Schnittpunkte von Hyperflächen angewandt. van der Waerden (Leipzig).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Dantzig, D. van: Neuere Ergebnisse der topologischen Algebra. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 665—674 (1936).

Bericht über Untersuchungsergebnisse aus dem Gebiet der topologischen Algebra, besonders aus Arbeiten des Verf., und über mögliche Anwendungen auf die algebraische Topologie. Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Furtwängler, Ph., und O. Taussky: Über Schieftringe. S.-B. Akad. Wiss. Wien **1936**, 525 (H. 7/8).

Ein Schieftring ist ein System von Elementen, das die Ringpostulate erfüllt, wobei aber weder für die Addition noch für die Multiplikation Kommutativität verlangt wird. Dann gilt: Besteht ein Schieftring nicht aus lauter Nullteilern, so ist die Addition in ihm kommutativ. Auszug.

Scorza, Gaetano: Sulle algebre riducibili. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **1**, 186—191 (1937).

Einfache Beweise bekannter Sätze von Scheffers und Wedderburn über die zweiseitige Zerlegung von Algebren mit und ohne Einselement in direkt-unzerlegbare Algebren und deren Zusammenhang mit der Zentrumszerlegung. van der Waerden.

Vorbeck, Werner: Nichtgaloissche Zerfällungskörper einfacher hyperkomplexer Systeme. Göttingen: Diss. 1935. 23 S.

Verf. gibt eine Darstellung einer einfachen normalen Algebra mit Hilfe eines beliebigen Zerfällungskörpers k , die im Fall eines Galoisschen Zerfällungskörpers k in die Darstellung als verschränktes Produkt übergeht. Es scheint ihm entgangen zu sein, daß diese Frage bereits vom Ref. in Math. Z. **30**, 79—107 (1929) behandelt worden ist. Dort findet sich auch bereits der Hauptsatz des Verf., sowie der Satz in § 1, daß jedes Faktorensystem zu einem aus Einheitswurzeln bestehenden Faktorensystem assoziiert ist. Die weiteren Resultate sind zu denen des Ref. äquivalent; eine vom Verf. bezüglich der Charakteristik von k gemachte Voraussetzung ist überflüssig. Brauer.

Herter, Max: Klassenzahl von Ringidealen ganzer Hurwitzscher Quaternionen und Hermiteischer Formen. Zürich: Diss. 1936. 59 S.

The writer considers a ring \mathfrak{R} in the classic quaternion algebra of the type treated by Fueter (this Zbl. **4**, 339). The conductor of such a ring is a complex integer Φ . If \mathfrak{a} is a left ideal, necessarily principal, in the set \mathfrak{G} of Hurwitz integral quaternions and if $N(\mathfrak{a})$ is prime to Φ , the intersection of \mathfrak{a} and \mathfrak{R} is called a regular left ideal in \mathfrak{R} . It is shown that there is a correspondence, as in algebraic numbers, between the left ideals in \mathfrak{G} and the regular left ideals in \mathfrak{R} ; also that the number of classes of ring ideals

is finite. For every class of ring ideals, there is a uniquely determined class of Hermitian forms of discriminant $N(\Phi)/2$. No class of forms corresponds to two classes of ideals but some classes of forms do not correspond to any class of ideals. For the case where $\Phi = f$, a rational integer, the number h of classes of ring ideals is determined explicitly in terms of the rational prime factors of f . A table is given, showing the values of h , together with the values of certain auxiliary functions, for $1 \leq f \leq 150$. *Latimer*.

Zahlentheorie:

Vaidyanathaswamy, R.: A remarkable property of the integers mod N , and its bearing on group-theory. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **5**, 63—75 (1937).

The author considers the divisors $1, t_2, \dots, t_m$ of an integer N . All those residues (mod N) which have the common factor t_i with N belong to one class C_i . The symbolic product $C_i \times C_j$ denotes all integers contained in $C_i + C_j$. These residues may be considered as a sum of classes, thus

$$C_i \times C_j = \sum \gamma_{ij}^k \cdot C_k$$

defining a commutative algebra. The coefficients γ_{ij}^k are determined by means of the prime factors of N . There are some applications to partitions of numbers and remarks on group theory. *Oystein Ore* (New Haven).

Fitting, F.: Über magische $(2a, a-1)$ -Sterne und $(2a, a-2)$ -Sterne. *Deutsche Math.* **2**, 84—89 (1937).

Verbindet man jeden Eckpunkt eines in $2a$ gleiche Teile geteilten Kreises mit dem $(a-1)$ -ten darauf folgenden, so entsteht ein $(2a, a-1)$ -Stern mit $2a$ „Seiten“ und $2a(a-1)$ „Eckpunkten“, die zu je $2a-2$ auf einer Seite liegen, zu je 4 die Eckpunkte von $\frac{1}{2}a(a-1)$ Rhomben sind und zu je $2a$ auf $a-1$ konzentrischen Kreisen liegen. Das Problem ist nun, die Zahlen $0, 1, \dots, 2a(a-1)-1$ so auf die „Eckpunkte“ zu verteilen, daß die Summe auf jeder Seite $(a-1)(2a^2-2a-1)$ ist. Dazu werden die Zahlen als 2stellige dargestellt: $00, 01, 10, 11, \dots, \{a(a-1)-1\}$. Man konstruiert 2 Hilfssterne: In dem ersten werden die Zahlen der ersten Stellen so geschrieben, daß in 2 gegenüberliegenden Eckpunkten eines Rhombus eine Zahl x kommt und in den 2 übrigen $a(a-1)-x-1$. In dem 2. Hilfsstern werden 0 und 1 auf gewisse Weise über die Kreise verteilt. Durch Addition der Zahlen der übereinstimmenden „Eckpunkte“ entsteht ein magischer $(2a, a-1)$ -Stern. Auch $(2a, a-2)$ -Sterne werden behandelt. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Rubinstein, E.: Généralisation de l'équation de Pell. *Wiadom. mat.* **43**, 169—182 (1937) [Polnisch].

Im ersten Teile der Arbeit beweist Verf. wichtige Sonderfälle eines Peterschen Satzes [vgl. z. B. S. Lubelski: Zur Gaußschen Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen. *J. reine angew. Math.* **176**, 59—60 (1936); dies. Zbl. **15**, 59]. Im zweiten Teile zeigt Verf., daß aus der Lösbarkeit von $ax^2 - by^2 = \pm 4$, $(a, b) = (x, y) = 1$, $a = [a]$, $b = [b]$ auch die Lösbarkeit von $aX^2 - bY^2 = \pm 1$ in natürlichen Zahlen folgt. Ref. bemerkt, daß z. B. schon

$$(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y)^3 = 8\left(\frac{\pm 1 + by^2}{2}\right)x\sqrt{a} + 8\left(\frac{\pm 1 + ax^2}{2}\right)y\sqrt{b}$$

eine solche Lösung ergibt.

S. Lubelski (Warschau).

Nagell, Trygve: Über den größten Primteiler gewisser Polynome dritten Grades. *Math. Ann.* **114**, 284—292 (1937).

Sei $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom mit mindestens zwei verschiedenen Nullstellen, $P(x)$ für natürliches x die größte in $f(x)$ aufgehende Primzahl. Nach C. Siegel [*Math. Z.* **10**, Satz 7, 204—205 (1921)] gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$. Unter Heranziehung klassischer Resultate von C. Stör-

mer [s. z. B. *Videnskapsselskabets Skrifter, I. Math. Naturv. Kl. Nr. 2* (1897)] und des Primzahlsatzes sowie einer einfachen klassischen Abschätzung für die kleinste Lösung der Pell-schen Gleichung $x^2 - dy^2 = \mp 1$ bzw. durch eine naheliegende Verallgemeinerung dieser Methode zeigte Ref. vor kurzem (dies. Zbl. **12**, 394 u. **13**, 389), daß für die quadratischen

Polynome $f(x) = Dx^2 - A$, wo D eine natürliche Zahl und A eine der Zahlen ∓ 1 oder ∓ 2 ist, sogar die schärfere Beziehung

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\log \log x} \geq 1 \quad (1)$$

gilt. Ein Teil der Mahlerschen Ergebnisse wurde unabhängig von ihm von S. Chowla (dies. Zbl. 10, 390) wiedergefunden. — In der vorliegenden Arbeit gelingt es dem Verf. zu zeigen, daß die Formel (1) auch für alle kubischen Polynome $f(x) = Dx^3 - A$, wo D eine natürliche Zahl, A aber gleich ∓ 1 oder ∓ 3 ist, gilt. Sein Beweis weist große Analogie zu dem des Ref. auf; nur tritt an Stelle der Störerschen Resultate bzw. ihrer Verallgemeinerungen ein wichtiger Nagelscher Satz über die Lösungen von $Ax^3 + By^3 = C$, wo A und B natürliche Zahlen sind, C aber gleich 1 oder 3 ist [J. de Math. (9) 4 (1925): Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées] und an Stelle der Abschätzung der Fundamentallösung der Pellischen Gleichung eine Abschätzung von Landau für die Einheiten algebraischer Zahlkörper (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1918, 88, Formel 18). *Mahler* (Krefeld).

Watson, G. N.: Singular moduli. VI. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 398—409 (1937).

Anschließend an des Verf. Veröffentlichung Sing. mod. IV, Acta Arithmetica 1 (1936); dies. Zbl. 13, 196, werden hier in gleicher Bezeichnungsweise diejenigen binär quadratischen Formen negativer Determinanten untersucht, welche in 2 Geschlechter zu je 4 Formenklassen zerfallen. Es existieren 31 solche Determinanten n , und zwar bleibt $-863 < n < -40$. Geleistet wird die Reduktion der Gleichungen 8. Grades der einfachsten Klasseninvarianten dieser 31 Fälle; Teilergebnisse in dieser Richtung waren insbesondere schon durch H. Weber [Lehrbuch der Algebra 3 (1908)] und S. Ramanujan gegeben worden. (V. vgl. dies. Zbl. 15, 389.) *Wilhelm Maier* (Freiburg i. B.).

Erdős, Paul: On the easier Waring problem for powers of primes. I. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 6—12 (1937).

Verf. untersucht die Darstellbarkeit von natürlichen Zahlen in der Form $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$, wo p_1, \dots, p_4 Primzahlen sind. Er beweist, daß die so darstellbaren Zahlen positive Dichte haben, d. h. ihre Anzahl unterhalb x ist $\geq \text{konst. } x$. — Hieraus folgt nach Schnirelmann, daß alle natürlichen Zahlen in der Form $p_1^2 + \dots + p_c^2 - p_{c+1}^2 + \dots + p_{2c}^2$ darstellbar sind, wo c eine absolute Konstante ist. — Der Beweis wird elementar geführt und benutzt u. a. die Brunsche Methode. — Ferner kündigt Verf. die folgenden Resultate an: Die Zahlen, die sich durch eine der 3 Formen $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2$ oder $p_1^3 + \dots + p_4^3 - p_5^3 - \dots - p_8^3$ oder $p_1^k \pm p_2^k \pm \dots \pm p_{2k}^k$ darstellen lassen, haben positive Dichte. *Hans Heilbronn* (Cambridge).

Ricci, Giovanni: Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann. II. mem. Pt. II. (Il metodo di Viggo Brun). Pt. III. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 6, 91—116 (1937).

This paper contains full details of results previously announced (see this Zbl. 15, 201 and 343). In Part II the Viggo Brun method is analysed into its combinatorial, algebraical and arithmetical constituents, and the author's own refinements are introduced. These are based in the main on the use of a descending scale of parameters $\theta_1, \theta_2, \dots$ to define the lengths of the intervals at successive stages. The results are applied in Part III to the proof of the general propositions (Theorems I, II, III, IV) enunciated in Part I. The deduction from these propositions of the results stated in the Introduction (see this Zbl. 15, 201) has already been given in Part I. *Ingham*.

Borel, Émile: Sur l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 626—627 (1937).

Ist $\varphi(q)$ eine positive zunehmende Funktion von q und bedeutet E die Menge der zwischen 0 und 1 eingeschlossenen Zahlen, die einer unendlichen Anzahl von Intervallen der Form

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q\varphi(q)}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q\varphi(q)}$$

(p, q ganz rational und positiv, $0 < \frac{p}{q} < 1$) angehören, so ist das Maß von E gleich 0 oder 1, je nachdem die Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q)}$ konvergiert oder divergiert. — Es sei bemerkt,

daß der Satz vom Ref. bereits 1924 (Math. Ann. **92**, 115—125), und zwar genau mit derselben Methode bewiesen war (die daselbst auftretende Zusatzforderung, daß $\frac{\varphi(q)}{q}$ zunehmend sein soll, ist für den Beweis ohne Belang). *A. Khintchine* (Saratow).

Gruppentheorie.

Schumann, Hans-Georg: Zum Beweis des Hauptidealsatzes. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **12**, 42—47 (1937).

Der von Furtwängler bewiesene mit dem Hauptidealsatz äquivalente gruppentheoretische Satz über zweistufig-metabelsche Gruppen wird mit einer das Gruppenbild benutzenden neuen Methode bewiesen und die Beziehungen zu dem Beweis von Iyanaga (dies. Zbl. **9**, 194; s. das dortige Referat) werden dargelegt. — Ist \mathfrak{G} das Gruppenbild einer Gruppe \mathfrak{F} mit den Erzeugenden S_i ($i = 1, \dots, n$), so liefern die Elemente von \mathfrak{F} Automorphismen von \mathfrak{G} , die ihrerseits Operatoren für die Gruppe \mathfrak{R} der eindimensionalen Ketten von \mathfrak{G} definieren; der Ring \mathfrak{R} dieser Operatoren ist der ganzzahlige Gruppenring von F , und die Elemente von \mathfrak{R} lassen sich eindeutig in der Form $\sum_{i=1}^u r_i s_i$ schreiben, wobei die r_i Elemente aus \mathfrak{R} und die s_i die den S_i zugeordneten

eindimensionalen Ketten aus \mathfrak{R} sind. Jedem Worte W aus den S_i läßt sich eindeutig ein Weg in \mathfrak{G} und damit eine Kette $\kappa(W)$ aus \mathfrak{R} zuordnen; die den geschlossenen Wegen von \mathfrak{G} entsprechenden Ketten bilden eine Untergruppe \mathfrak{R}_0 ; ist \mathfrak{S} die freie von den S_i erzeugte Gruppe und \mathfrak{M} ein Normalteiler von \mathfrak{S} , so daß $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{S}/\mathfrak{M}$ wird, und ordnet man jedem Worte der S_i , das in \mathfrak{M} liegt, die ihm entsprechende Kette aus \mathfrak{R}_0 zu, so wird \mathfrak{M} hierdurch homomorph auf \mathfrak{R}_0 abgebildet derart, daß genau die Ableitung \mathfrak{M}' von \mathfrak{M} in das Einheitsselement von \mathfrak{R}_0 übergeht. Ist \mathfrak{N} ein in \mathfrak{M} enthaltener Normalteiler von \mathfrak{S} und $\mathfrak{M}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{L}$ abelsch, so wird \mathfrak{N} analog auf eine Untergruppe \mathfrak{R}_r von \mathfrak{R}_0 abgebildet, und zwar ist $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$. Die Gruppen $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ bzw. $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_r$ sind operatorisomorph mit den Gruppen U bzw. \bar{U} von Iyanaga; der Hauptidealsatz wird äquivalent mit dem Satz: Ist Φ die Summe der Elemente von F , wobei F jetzt eine endliche Abelsche Gruppe ist (und Φ ein Element aus \mathfrak{R} ist), so gehören die Ketten Φs_i zu \mathfrak{R}_r .

Magnus (Frankfurt a. M.).

Wall, H. S.: Hypergroups. Amer. J. Math. **59**, 77—98 (1937).

Unter einer Hypergruppe der positiv-ganzzahligen Dimension n versteht der Autor eine Menge H von Elementen, für die eine Multiplikation xy mit folgenden Eigenschaften erklärt ist: (1) Für jedes geordnete Paar x, y von Elementen aus H ist $x \cdot y = z_1 + \dots + z_n$ eine Menge von n gleichen oder verschiedenen Elementen z_i aus H . (2) $(xy)z = x(yz)$. (3) Es existiert ein Element e in H , das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: (3.1) für jedes x in H enthalten ex und xe das Element x ; (3.2) zu jedem x in H existiert ein Element x' in H , so daß xx' und $x'x$ beide e enthalten. — Unter $[xy]$ wird die Menge der verschiedenen unter den Elementen in xy verstanden, und s heißt ein Skalar, wenn alle $[sx]$ und alle $[xs]$ einelementig sind. Existieren Skalare in H , so gibt es nur eine Identität e in H , und die Skalare bilden eine Gruppe hinsichtlich der Operation $[st]$. Sind überdies die Inversen eindeutig bestimmt — dies ist keine Folge aus den vorhergehenden Annahmen —, so sind die Elemente a und b aus H dann und nur dann beide Skalare, wenn $[ab]$ ein eindeutig bestimmter Skalar ist; weiter ist H unter diesen Annahmen eine Mischgruppe hinsichtlich der Operation: $x \circ y = [xy]$, wenn x ein Skalar ist. — Die Zerlegungen von Gruppen nach Doppelmoduln liefern Beispiele derartiger Hypergruppen. *Reinhold Baer* (Princeton, N. J.).

Montgomery, Deane, and Leo Zippin: Translation groups of three-space. Amer. J. Math. **59**, 121—128 (1937).

The authors ask, when is a commutative k -parameter group V^k of transformations of Euclidean n -space E_n , equivalent to a translation-group? That is, when does E_n

have a "true section" Z [cf. Whitney, *Ann. of Math.* **34**, 244—270 (1933); this *Zbl.* **6**, 371] of the surfaces $pV_k[p \in E_n]$ of transitivity — one such that the $zv[z \in Z, v \in V^k]$ express E_n as the topological product $z \times V^k$. The authors note that if Z exists, then each $p \in E_n$ is moved arbitrarily far from itself by $v \in V^k$ sufficiently far from the identity (property of "dispersiveness"). They prove that dispersiveness implies the existence of Z if $k \geq n - 2$. When $k < (n - 2)$, the authors formulate equivalent problems. Niemytski has discussed $k = 1$. *Birkhoff* (Cambridge).

● **Cartan, Élie:** *La topologie des groupes de Lie. (Actualités scient. et industr. Nr. 358. Exposés de géométrie. Publiés par E. Cartan. VIII.)* Paris: Hermann & Cie. 1936. 28 pag. Frcs. 10.—

This is a reprint of the lecture which first appeared in *l'Enseignement mathématique* **35**, 117—200 (1936) (*Zbl.* **15**, 204). *Smith* (New York).

Analysis.

Hadwiger, H.: *Versuch einer kontinuierlichen Integration.* Mitt. naturforsch. Ges. Bern **1936**, LVII—LVIII (1937).

Ciorănescu, Nicolas: *L'itération des fonctions de moyenne.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **38**, 71—74 (1936).

L'auteur étend le processus d'itération qui fournit la moyenne arithmético-géométrique de Gauss à des fonctions moyennes satisfaisant aux hypothèses suivantes: $\varphi(x, y)$ étant une telle fonction moyenne pour les nombres x et y , on doit avoir: 1° $\varphi(x, y)$ est continue; 2° $\varphi(x, x) = x$; 3° si $x < y$, $x < \varphi(x, y) < y$; 4° $\varphi(x, y) = x$ ou $\varphi(x, y) = y$ entraînent l'une et l'autre l'égalité $x = y$. — Cette dernière condition est l'hypothèse agissante pour démontrer l'unicité de la limite à laquelle conduit le processus d'itération. Il suffit d'ailleurs que l'une des deux fonctions moyennes y satisfasse. Le calcul de la moyenne mixte ainsi définie est lié à celui de „l'invariant d'itération“ défini par les deux moyennes que l'on combine. *E. Blanc* (Paris).

Young, L. C.: *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration.* Acta math. **67**, 251—282 (1936).

The author considers the class W_p of functions of bounded mean variation of order p , introduced by Wiener (*J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Technol. **1924**, 72—94) and defined by $\sup \left(\sum_r |f(x_r) - f(x_{r-1})|^p \right)^{1/p} = V_p(f) < \infty$ where \sup is taken for all finite subdivisions of the interval of definition of $f(x)$. Various results are proved for functions of class W_p , of which we mention only the following: (1) If $f(x) \in W_p$, $g(x) \in W_q$, $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$ and if $f(x)$ and $g(x)$ have no common discontinuities (all possible discontinuities of a function of class W_p are only of first kind, and at most denumerable) the Stieltjes integral $\int f(x) dg(x)$ exists in the Riemann sense (analogous statement holds for the existence of the integral in a more general, Moore-Pollard sense). (2) Let $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ be two sequences of functions belonging to the classes W_p , W_q , respectively, over an interval $[x', x'']$, $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$. Let $f_n(x)$ converge at a dense set of points in $[x', x'']$ to a function $f(x) \in W_p$, and uniformly to $f(x)$ at all points of a set A . Let $g_n(x)$ converge at a dense set to a function $g(x) \in W_q$, including the end-points x', x'' , and uniformly to $g(x)$ at all points of a set B . It is further assumed that A includes all the discontinuities of g and B includes all discontinuities of f . Then $\int_{x'}^{x''} f_n dg_n \rightarrow \int_{x'}^{x''} f dg$. (3) Let the real-valued periodic functions (of period 2π),

$$f(x) \sim \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad g(x) \sim \sum (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$$

belong respectively to W_p , W_q , $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} \pi n (a_n b'_n - a'_n b_n)$ converges to $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dg(x)$. An essential point in many proofs of the paper is the fact

that the Dirichlet kernel is the derivative of a function which belongs to each class W_q , $q > 1$ uniformly in n (but not to W_1 !). Basic for the whole paper is the inequality $\left| \sum_{0 < r \leq s \leq n} a_r b_s \right| \leq \{1 + \zeta(1/p + 1/q)\} S_{p,q}(a, b)$, where $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$, ζ is the classical Riemann zeta function, and $S_{p,q}(a, b)$ is the largest of the values of the product $\left(\sum_1^m |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_1^m |y_k|^q \right)^{1/q}$ where $x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m$ are obtained by replacing various groups of successive terms of sequences $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$, by their sums, the groups being the same in forming the x 's and the y 's. *J. D. Tamarkin.*

Young, Laurence C.: Sur une généralisation de la notion de variation de puissance $p^{\text{ième}}$ bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 470—472 (1937).

This paper contains statements (without proofs) of extensions of various results of author's previous paper (see the review above) to the class of functions $\sum_i \Phi[f(\beta_i) - f(\alpha_i)]$ bounded, where the summation is extended over all finite systems of non-overlapping sub-intervals of the interval of definition of $f(x)$, and $\Phi(u)$ is a given continuous strictly increasing function vanishing for $u = 0$ and $\uparrow \infty$ as $u \uparrow \infty$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Morse, Anthony P.: Convergence in variation and related topics. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 48—83 (1937).

This paper continues and extends the studies on convergence in variation of Adams and Clarkson (see this Zbl. **9**, 306) and on convergence in length of Adams and Lewy (see this Zbl. **11**, 252). By considering complex valued functions of bounded variation, the length of the function $y(x)$ reduces to the total variation of the function $x + iy(x)$. The main portion of the paper is devoted to the effect of substitution on convergence. Basic is a generalization of de Vallée-Poussin's substitution theorem for Lebesgue integrals [Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 466 (1915)]: If X is on (a, b) to (α, β) and differentiable almost everywhere, and $\psi(x)$ is defined, finite valued and Lebesgue integrable on (α, β) then $\int_{X(a)}^{X(t)} \psi(s) ds = \int_a^t \psi(X(s)) X'(s) ds$ if and only if $\Psi(X(t))$ is absolutely continuous on (a, b) , where $\Psi(x) = \int_a^x \psi(s) ds$. For substitution in real valued functions of bounded variation we have [if $\|X\|$ represents the total variation of X on $(0, 1)$] that $\|X_n - X_0\| \rightarrow 0$ implies $\|\psi(X_n) - \psi(X_0)\| \rightarrow 0$, provided either (a) X_n satisfy a Lipschitz condition with the same modulus, and ψ satisfies a Lipschitz condition on every finite interval, or (b) X_n are monotone and satisfy a Lipschitz condition with the same modulus, and ψ is absolutely continuous. For the complex valued continuous function of the complex variable $\varphi(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, combinations of these conditions give four sufficient conditions to insure that if $g_n = X_n + iY_n$ satisfy the same Lipschitz condition, then $\|g_n - g_0\| \rightarrow 0$ implies $\|\varphi(g_n) - \varphi(g_0)\| \rightarrow 0$, under the following conditions on u and v : there exist n_1 functions $A_i(x)$ and n_2 functions $B_j(y)$ and a function of $n_1 + n_2$ variables $U(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2})$ having continuous first partial derivatives in $(n_1 + n_2)$ -space, such that $u(x, y) = U(A(x), B(y))$, $A_i(x)$ [$B_j(y)$] being absolutely continuous or satisfying a Lipschitz condition on every finite interval according as X_n [Y_n] are or are not monotone. As a corollary, if u and v have continuous first partial derivatives, then convergence in variation of f_n to f_0 , with f_0 continuous implies convergence in variation of $\varphi(f_n)$ to $\varphi(f_0)$. It is shown further that convergence in length of Y_n to Y_0 is equivalent to convergence in variation of $cI + Y_n$ to $cI + Y_0$, for every real constant c , $I(x)$ being x , and also to the convergence of Y_n to Y_0 in variation and convergence of Y'_n to Y' almost in the mean (being convergence in the mean for sets whose complementary sets have arbitrarily small measure). The closing section brings the equivalence of

the condition $\lim_n \int_0^1 |f_n - f_0| = 0$ to the combination $\lim_n \int_0^t f_n(s) ds = \int_0^t f_0(s) ds$ and $\lim_n \int_0^1 |c + f_n(s)| ds = \int_0^1 |c + f_0(s)| ds$ for all real c , f_n and f_0 being Lebesgue integrable on $(0, 1)$; and the following generalisation of a theorem of Plessner: f , finite, realvalued, with period 1, and measurable on a set of positive measure on $(0, 1)$ is continuous if $\lim_{h \rightarrow 0} \|_t f(t + hg(t))\| = 0$ for some non-vanishing realvalued function g of bounded variation, and is absolutely continuous if $\lim_{h \rightarrow 0} \|_t f(t + hg(t)) - f(t)\| = 0$ for some realvalued function g of bounded variation bounded from zero. *Hildebrandt.*

Frostman, Otto: La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 149—159 (1937).

The author gives a new proof for the fundamental theorem of F. Riesz concerning the representation of subharmonic and superharmonic functions in terms of potentials. Let $f(P)$ be a continuous, non-negative superharmonic function in a domain D (in three-space). Denote by $G(P, Q)$ Green's function for D , and by A a bounded closed set of positive capacity in D . Consider the functional $J(\mu) = (1/2) \int_A \int G(P, Q) d\mu(e_P) d\mu(e_Q) - \int_A f(P) d\mu(e_P)$, where $\mu(e)$ is a positive mass-distribution, defined for all subsets e , measurable in the Borel sense, of A . It is shown that there exists a unique distribution $\mu_A(e)$ which minimizes $J(\mu)$, and that in terms of $\mu_A(e)$ the given superharmonic function $f(P)$ can be expressed in the form $f(P) = \int_A G(P, Q) d\mu_A(Q)$, except possibly for a set of capacity zero.

Tibor Radó (Columbus).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Marcinkiewicz, J.: Quelques remarques sur l'interpolation. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 127—130 (1937).

By use of an idea of Fejér the author proves various remarkable properties of the Lagrange polynomials $L_n(x)$ coinciding with a given function $f(x)$ on a certain set ξ_n of n points from $[-1, +1]$ varying with n . A very simple proof of Faber's theorem is given that for a given sequence ξ_n a continuous function $f(x)$, $-1 \leq x \leq +1$, exists such that $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{-1 \leq x \leq +1} |L_n(x)|$ is infinite. On the other hand, if the continuous function $f(x)$ is prescribed, the sequence $\{\xi_n\}$ can be chosen such that $L_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformly in $[-1, +1]$. Finally, under a certain restriction on the sequence $\{\xi_n\}$ it is shown that the sequence $L_n(x)$ tends to $f(x)$ [$f(x)$ continuous] if it converges at all.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Marcinkiewicz, J.: Sur la divergence des polynomes d'interpolation. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 131—135 (1937).

As a perfection of the recent results of Grünwald (cf. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 207; this Zbl. 12, 350) and of the author, a continuous function $f(x)$, $-1 \leq x \leq +1$, is constructed with the following remarkable property. The Lagrange polynomials $L_n(x)$ coinciding with $f(x)$ at the points $x = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), diverge at each point of the closed interval $-1 \leq x \leq +1$. [In the meantime Grünwald obtained the same result; cf. Annals of Math., II. s. 37, 908 (1936), this Zbl. 15, 252.] *G. Szegő.*

Erdős, P., and P. Turán: On interpolation. I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange-interpolation. Ann. of Math., II. s. 38, 142—155 (1937).

Let $\{\xi_n\}$ be a sequence of n points from $[-1, +1]$ varying with n ; let $L_n(x)$ denote the sequence of Lagrange polynomials coinciding with a given R integrable function $f(x)$ at the points ξ_n . The authors are interested in the mean convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(x)|^p dx = 0 \quad (*)$$

for $p = 2$ and $p = 1$. Let ξ_n be the zeros of the orthogonal polynomial $p_n(x)$ of degree n corresponding to the weight function $w(x) \geq \mu > 0$. Then (*) holds with $p = 2$. The same is true if we choose for ξ_n the zeros of $p_n(x) + A_n p_{n-1}(x) + B_n p_{n-2}(x)$, where A_n arbitrary real, $B_n \leq 0$. If $\int_{-1}^{+1} w(x) dx$ and $\int_{-1}^{+1} w(x)^{-1} dx$ exist, and ξ_n is defined by the zeros of the linear combination mentioned, (*) holds with $p = 1$. Finally the existence of a continuous function $f(x)$ is proved for which (*) with $p = 2$ does not hold provided that $\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} l_k(x)^2 dx$ is unbounded; here $l_k(x)$ are the fundamental polynomials of the Lagrange interpolation corresponding to the set ξ_n . *G. Szegő.*

Kravčuk, M.: Sur quelques approximations dans le problème des moments généralisé. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 91–95 (1937).

Let $P(x)$ and $Q(x)$ denote two non-negative non-decreasing functions whose first $n + 1$ (generalized) moments coincide:

$$\zeta_k \equiv \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos \kappa \pi \frac{x-\alpha}{T} dQ(x) - \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos \kappa \pi \frac{x-\alpha}{T} dP(x) = 0; \quad \kappa = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Then, as previously (see this Zbl. **10**, 203) shown by the author,

$$\left| \int_{\alpha}^x dQ(x) - \int_{\alpha}^x dP(x) \right| = O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \alpha \leq x \leq \alpha + T, \quad (2)$$

and this estimate may be reduced to $O\left(\frac{1}{n}\right)$ for some special $P(x)$. — In the present Note the author derives (mainly without proofs) estimates similar to (2) for the case where the equalities (1) are only approximately satisfied, i.e. all $|\zeta_k|$ are sufficiently small. Application is made to the theory of distribution functions, in particular, to estimating the deviation of a such a function from the normal distribution function (Liapounoff's theorem). *J. Shohat (Philadelphia).*

Sewell, W. E.: Generalized derivatives and approximation by polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 84–123 (1937).

The author is interested in the analog of the classical results of S. Bernstein, de la Vallée-Poussin, and Jackson for functions $f(z)$ analytic interior to a certain Jordan curve C and continuous on C . The main theorem states the existence of a generalized derivative of order α' of $f(z)$ on C , provided that polynomials $p_n(z)$ exist such that $f(z) - p_n(z) = O(n^{-\alpha})$ in the closed interior of C . Here $\alpha > 0$ and $\alpha' < \alpha t^{-1}$ where t depends on the structure of C , especially on its "smoothness", $1 \leq t \leq 2$. In the case of an analytic curve we have $t = 1$. More general cases can be characterized by certain boundedness properties of the difference ratio $(\psi(z_1) - \psi(z_2)) : (z_1 - z_2)$, where $\psi(z)$ is the usual map-function of the exterior of C and z_1, z_2 are arbitrary points exterior to C . For instance, if C consists of a finite number of analytic arcs with the exterior openings $\mu_k \pi$, $0 < \mu_k < 2$, at the corners, we have $t = \max(1, \mu_k)$. Two problems of independent interest play a rôle in these investigations. The author studies the "distance" of the level curves $C_R: |\psi(z)| = R$, $R > 1$, of the exterior map-function from $C_1 = C$ and obtains upper and lower bounds in terms of certain powers of $R - 1$; here the exponents again depend on the structure of C . Furthermore, Bernstein-Markoff's theorem on polynomials is generalized in the following direction. Let the polynomial $p_n(z)$ of degree n satisfy the condition $|p_n(z)| \leq 1$ on C ; then the generalized derivative $p_n^{(\alpha)}(z)$ remains less than $M n^{\alpha t}$ on C . Here M depends on α and C ; t is the same constant as above. The former bound with $t = 2$ holds even if the interior of C is replaced by a bounded simply connected region whose boundary points are accessible. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Orlicz, W.: Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen. *Studia Math.* **6**, 98—103 (1936).

Let T denote a summation process of the finite Toeplitz type (i.e. every row contains only a finite number of elements). Let $M(u)$ be a continuous and convex function, $M(u) > 0$ for $u > 0$ and satisfying $M(2u) \leq kM(u)$ for $u \geq u_0$; let $\lim_{u \rightarrow 0} u^{-1}M(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-1}M(u) = \infty$, $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2}M(u) = 0$. Then an orthogonal system $\{\varphi_n(x)\}$ exists such that for each T a function $f(x)$ can be constructed with the following properties. The integral $\int_a^b M(|f(x)|) dx$ exists, and the Fourier development of $f(x)$ is not summable by the process T . Several other "Gegenbeispiele" of a similar kind are constructed. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Kaczmarz, S.: Notes on orthogonal series. III. *Studia Math.* **6**, 112—116 (1936).

Let $\{\varphi_n(x)\}$ be an orthonormal system, $0 \leq x \leq 1$. We say that this system presents the singularity k_p , $p \geq 1$, if a function $f(x) \in L^p$ exists such that $\sum n^{p-2} |f_n|^p = \infty$ (f_n are the Fourier constants of $f(x)$); the same system presents the singularity l_p , $p \geq 1$, if a series $\sum a_n \varphi_n(x)$ with $\sum n^{p-2} |a_n|^p < \infty$ exists which is not the Fourier series of a function of L^p . These definitions keep their sense for $p = \infty$ if we define L^∞ by the boundedness of $f(x)$ and replace the former conditions by the non-boundedness or boundedness of $n |f_n|$ and $n |a_n|$, respectively. The author shows that the existence of $l_\infty(l_1)$ implies that of $k_1(k_\infty)$, and that the converse is also true provided that $\varphi_n(x) \in L^\infty$ and $\{\varphi_n(x)\}$ is complete in L^∞ in the first and $\{\varphi_n(x)\}$ is complete in L in the second case. Furthermore: If $|\varphi_n(x)| \leq A$, k_∞ actually occurs; the same holds if $\{\varphi_n(x)\}$ is complete in L^2 . In the first case l_∞ occurs also. (II. see this Zbl. **13**, 109.) G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Reihen:

Fejér, Leopold: Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Acta Litt. Sci. Szeged* **8**, 89—115 (1937).

In several recent papers the author has proved various positivity, monotony, and univalence properties of the analytic functions $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ whose coefficients a_n form monotonic sequences of a certain order k . In the present paper some of these results are improved by diminishing the order of monotony required. In addition, new properties of such functions are obtained. For instance: Under the condition mentioned, $f(x)$ is regular for $|x| < 1$, and $f^{(\nu)}(x) \geq 0$ in $(-1, +1)$ if $0 \leq \nu \leq k-1$. For $k=4$, the function $f(x)$ is univalent in $|x| < 1$. If $\{a_n\}$ is a monotonic sequence of order 2, $f(x)$ is star-shaped in $|x| < 1$. Further results concern the sequence $\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n \right|^2$, $m=0, 1, 2, \dots$. As a generalization of a former result, due to the author and the reviewer (*Prace mat.-fiz.* **44**, 15—25; this Zbl. **15**, 254), it is shown that this is a monotonic sequence of order $k-1$, provided $\{a_n\}$ is monotonic of order k . Finally, the "Legendre polynomials" $P_n(\cos \theta)$ defined by

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) r^n$$

are investigated. If $\{a_n\}$ is monotonic of order 2, the arithmetic means of order 1 of the last series are non-negative if $r=1$, $0 \leq \theta \leq \pi$. This is an improvement of a former result of the author in which $k = \infty$ (i.e. complete monotony) was required. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Kuzmin, R.: Über die überall divergenten trigonometrischen Reihen. *Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math.* Nr **10**, 53—56 u. deutsch. Zusammenfassung 56 (1936) [Russisch].

Es werden die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i(n x + b_n)} \quad (1)$$

betrachtet. L. Neder hat 1914 (Göttingen, Dissertation) bewiesen, daß bei einer geeigneten Wahl der Konstanten b_n die Reihe (1) schon für $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ überall divergiert. Verf. zeigt, daß man dafür $C_n = n \log n - n$ nehmen kann. Später hat L. Neder [Math. Ann. 84, 117—136 (1921)] gezeigt, daß überall divergente Reihen von der Form (1) existieren, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$ beliebig langsam divergiert. Verf. behauptet jetzt, daß für eine beliebige monotone Funktion $\psi(n)$, welche bei $n \rightarrow +\infty$ den Bedingungen $\psi(n) \rightarrow +\infty$, $\psi'(n) \rightarrow 0$ genügt, die Reihe (1) mit

$$C_n = \sqrt{\psi'(n)}, \quad b_n = \int_{n_0}^n \psi(t) dt,$$

überall divergiert; dies gibt offenbar einen neuen Beweis des erwähnten Nederschen Satzes.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Randels, W. C.: On the summability of Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 85—89 (1937).

An example is given of a Fourier-Lebesgue series which at a certain point is summable A but is not summable (C, α) , however large α may be. In particular, we obtain a numerical series $\sum u_n$, with terms tending to 0, which is summable A but not summable (C, α) . The first example of such a series was given by J. E. Littlewood [Proc. London Math. Soc. 9, 434—448 (1911)].

A. Zygmund (Wilno).

Zygmund, A.: Note on trigonometrical and Rademacher's series. Prace mat.-fiz. 44, 91—107 (1937).

The author starts out by proving that if $\sum |c_n|^r < \infty$, $1 < r \leq 2$, then the Rademacher series $f(t) = \sum c_n \varphi_n(t)$ satisfies the inequality

$$\left\{ \int_0^1 |f(t)|^k dt \right\}^{1/k} \leq k^{1/r'} \left\{ \sum |c_n|^r \right\}^{1/r},$$

$k \geq 1$, $1/r + 1/r' = 1$. Further $\int_0^1 \exp[\lambda |f(t)|^{r'}] dt$ exists for every $\lambda > 0$. — Analogues of these theorems hold for lacunary trigonometric series $\sum [a_n \cos n_\nu x + b_n \sin n_\nu x]$ where $n_{\nu+1}/n_\nu > q > 1$. The resulting inequalities will then contain an additional factor depending upon q . — If $g(x)$ is such that $g[\log^+ |g|]^{1/r} \in L_1(0, 2\pi)$, $r \geq 2$, and has the Fourier coefficients a_n , b_n and $n_{\nu+1}/n_\nu > q > 1$, then

$$\left\{ \sum (|a_{n_\nu}|^r + |b_{n_\nu}|^r) \right\}^{1/r} \leq A(r, q) \int_0^{2\pi} |g| [\log^+ |g|]^{1/r} dx + B(r, q).$$

This theorem ceases to hold for $0 < r < 2$. — The rest of the paper is devoted to results of the "almost all" type. Thus, if $\sum (|a_n|^r + |b_n|^r) < \infty$, $1 < r \leq 2$, then, for almost all values of t , the series $\sum [a_n \cos n x + b_n \sin n x] \varphi_n(t)$ converges almost everywhere in x ; the n -th partial sum being $o[(\log n)^{1/r'}]$ uniformly in x , and the series

$$\sum (\log n)^{-1/r'-\varepsilon} [a_n \cos n x + b_n \sin n x] \varphi_n(t)$$

converges uniformly in x . — Analogous results hold for complex unit factors and for almost periodic functions.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Spezielle Funktionen:

Duffahel, Maurice de: Some polynomials analogous to Abel's polynomials. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 151—158 (1936).

The author studies the polynomials defined by $e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{ e^{-x^2} x^n \}$ from the usual points of view. This is a polynomial of degree $2n$ which satisfies a certain differential equation of the third order.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Kramaschke, Lothar: Nullstellen der Zetafunktion. Deutsche Math. 2, 107—110 (1937).

The theorem that $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, has at least one zero for $T < t < T + A/\log \log \log T$ for large T and a certain constant A , was originally proved by Littlewood, using the conformal representation of a rectangle on a circle. A later proof by Titchmarsh (this Zbl. 5, 10) uses a sequence of circles. The author gives still another proof, using an angular region. The value 4π is obtained for the constant A . Titchmarsh (Oxford).

Kommerell, Karl: Geometrische Herleitung des Additionstheorems für das elliptische Integral erster Gattung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 47, Abt. 2, 24—25 (1937).

Die Berührebenen des Asymptotenkegels eines einschaligen Hyperboloides schneiden aus dem letzteren gleichlaufende Geradenpaare aus. Betrachtet man jenes Hyperboloid andererseits als Element eines dreifach orthogonalen Flächensystems fester Brennpunkte, bestimmt also jeden Raumpunkt nicht eindeutig als Schnitt orthogonaler Ebenen, sondern 8-deutig als Schnitt dreier orthogonaler F_2 , so beschreiben die zugehörigen elliptischen Parameter u, v, w differentiell durch

$$\frac{du}{\sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u-c^2)}} = \frac{dv}{\sqrt{(v+a^2)(v+b^2)(v-c^2)}} \quad (1)$$

die Asymptotenlinien des Hyperboloides. Dieselben Geraden wurden oben durch Ebenenschnitt algebraisch gekennzeichnet, und die klassische Integration von (1) durch das Additionstheorem elliptischer Integrale wird so aus einfachen geometrischen Gesichtspunkten verständlich.

Wilhelm Maier (Freiburg i. Br.).

Fouquet, Walter: Dipolare Koordinaten und Kugelfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 17, 48—55 (1937).

Es handelt sich um orthogonale Koordinaten, die aus der konformen Abbildung der komplexen Ebene mittels des Ctg hervorgehen. Das entstandene dipolare System von Kreisen kann durch Drehung um eine der beiden Symmetrieachsen zu kugelförmigen und zu ringförmigen dipolaren Koordinaten erweitert werden. Die Transformationsformeln der rechtwinkligen Koordinaten auf die neuen enthalten Produkte von hyperbolischen und Kreisfunktionen. Verf. transformiert mit Hilfe dieser Formeln den Laplaceschen Differentialausdruck auf die neuen Koordinaten. Als erste Anwendung betrachtet er das statische elektrische Feld zweier Kugeln. Die Integration führt auf Kugelfunktionen erster und zweiter Art, deren Ordnung gleich der Hälfte einer ganzen Zahl ist. Als zweites Beispiel betrachtet er das statische Feld eines Kreisringkörpers, wobei die Berechnung nach einer neuen Transformation der betr. Differentialgleichung ebenfalls auf solche Kugelfunktionen führt. Bei der Berechnung der Kugelfunktionen halbbebrochener Ordnung erster Art geht Verf. von der Laplaceschen Integraldarstellung dieser Kugelfunktionen aus. Nach einer einfachen Umformung lassen sich diese Funktionen durch hypergeometrische Reihen und in den einfachsten Fällen durch vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken. Bei der Berechnung der Kugelfunktionen halbbebrochener Ordnung zweiter Art wird von der Mehlerschen Integraldarstellung der Kugelfunktionen ausgegangen. Nach einigen einfachen Transformationen lassen sich auch diese Funktionen mittels der hypergeometrischen Reihe und in einfachsten Fällen mittels vollständiger elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken. Die betr. Funktionen werden für die Ordnungen $-1/2$, $+1/2$ und $3/2$ nebst ihren ersten Ableitungen tabelliert, wobei das Argument $\cosh x$ ist und x mit Schritten von 0,1 von 0 bis 3,0 läuft. M. J. O. Strutt.

Popov, A. I.: Some remarks on Bessel functions. Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math. Nr 10, 49—52 u. engl. Zusammenfassung 52 (1936) [Russisch].

Es werden (ohne Beweise) einige Summen- und Integralformeln mit Besselschen Funktionen angegeben, z. B.:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{e^{2\pi a y} dy}{(y^2 + n^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^{\nu+\frac{1}{2}} a^{\nu}}{n^{\nu} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot J_{\nu}(2\pi n a), \quad c > 0, \quad a > 0, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{\nu}(2\pi k a) = \frac{1}{2\pi a} - \frac{a^{\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \sqrt{n^2 - a^2})^{\nu} \cdot \sqrt{n^2 - a^2}}, \quad \Re(\nu) > 0, \quad 0 < a < 1.$$

Zusammenhänge mit zahlentheoretischen Funktionen. *W. Stepanoff* (Moskau).

Banerjee, D. P.: A further note on the zeros of Bessel functions. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. **2**, 211—212 (1937).

Die Hypothese von Bourget besagt, daß nie zwei Nullstellen zweier Besselscher Funktionen erster Art reeller Ordnung gleichen Argumentes zusammenfallen können, solange die Ordnungszahlen endlich sind. Verf. beweist die Richtigkeit dieser Hypothese unter der Voraussetzung, daß der Absolutwert der einen Ordnungszahl m kleiner ist als 1 und daß die andere Ordnungszahl größer ist als $m^2/2 (1 - m)$. Zum Beweis macht Verf. Gebrauch von einer früher bewiesenen Integraldarstellung für diese Funktionen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Peyovitch, T.: Contribution à l'étude des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* **7**, 24—34 (1937).

In dem System $\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, seien die a_{ik} zunächst konstant. Dann wird unter gewissen Voraussetzungen über die charakteristischen Wurzeln der Matrix $((a_{ik}))$ und das Verhalten der Funktionen $f_i(t)$ im Unendlichen die Existenz von Lösungssystemen x_i gezeigt, für die gilt: Bedeutet ϱ den größten Realteil der charakteristischen Wurzeln, dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |x_i| = \begin{cases} \infty & \text{für } \varrho > 0 \\ 0 & \text{für } \varrho < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{i=1}^n |x_i|}{t} = \varrho.$$

Ein entsprechender Satz ergibt sich für Systeme der Form $\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k = f_i(t)$, wenn man voraussetzt, daß die $a_{ik}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ Grenzwerte besitzen. *Rellich*.

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur l'intégration d'une équation différentielle importante du premier ordre. *Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade* Nr **3**, 7—19 (1936).

À l'équation $\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 + \varrho^2 = F(\theta)$ se ramènent par une transformation de contact les équations de la forme: $b_0(y') x^2 + 2 b_1(y') xy + b_2(y') y^2 + b_3(y') = 0$; on obtient ainsi de nouveaux cas d'intégrabilité de la première équation, p. ex. $F = A (\sin \lambda \theta)^{-2 - \frac{2}{\lambda}} + B (\cos \lambda \theta)^{-2 - \frac{2}{\lambda}}$, $F = A + B \log \operatorname{tg} \theta$ (voir ce Zbl. **11**, 400). *W. Stepanoff*.

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Contribution à la théorie des intégrales premières d'équations différentielles. *Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade* Nr **3**, 33—35 (1936).

In Verallgemeinerung einer Bemerkung von M. Petrovitch (dies. Zbl. **11**, 349) wird auf ein Verfahren hingewiesen, mit Hilfe dessen Differentialgleichungen höherer Ordnung gebildet werden können, welche sei es „integrabel“ sind, sei es ein vorgegebenes erstes Integral besitzen. Zwei Beispiele. *Haupt* (Erlangen).

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Intégration d'une équation différentielle du premier ordre et polynômes d'Hermite qui s'y rattachent. *Rev. Ci., Lima* **38**, Nr 418, 123—127 (1936).

L'équation d'Hermite $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ (n entier positif) par la transformation $y = \exp\left(\frac{x^2}{2} + \int t dx\right)$ est ramenée à une équation de Riccati, et cette

dernière par la transformation de contact avec la relation déterminante $\varrho - x \cos \theta \pm i t \sin \theta = 0$, à l'équation $\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 + \varrho^2 = \pm i \operatorname{tg} \theta + 2n + 1$, laquelle est par conséquent intégrable par des quadratures. W. Stepanoff (Moskau).

Petrovitch, Michel: Équations différentielles du premier ordre à intégrales bornées. Rev. Ci., Lima 38, Nr 418, 109—114 (1936).

L'équation $F(x, y, y') = 0$, F étant un polynôme irréductible en y, y' , pair en y' $F = \sum_{i,j} f_{ij}(x) y^{2i} y'^{2j} + \sum_{i,j} \varphi_{ij}(x) y^{2i+1} y'^{2j}$, a toutes ses intégrales comprises entre $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ lorsque les φ_{ij} sont de même signe et que $\lambda_1 \leq -f_{ij}/\varphi_{ij} \leq \lambda_2$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Un théorème analogue pour F pair aussi en y . L'équation $y' = P/Q$, P, Q étant des polynômes en y , $P = s_0(x)y + s_1(x)y^3 + s_2(x)y^5 + \dots$, $Q = q_0 + q_1 y^2 + q_2 y^4 + \dots$, possède la courbe intégrale par (x_0, y_0) comprise entre $y = y_0 \exp \int_{x_0}^x \lambda_2(x) dx$ et $y = y_0 \exp \int_{x_0}^x \lambda_1(x) dx$, si les q_i sont de même signe, et $\lambda_1 \leq s_i/q_i \leq \lambda_2$ ($i = 0, 1, \dots$). W. Stepanoff (Moskau).

Sansone, Giovanni: Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un'equazione differenziale della dinamica. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 385—403 (1936).

Pour l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} + m(t)x = 0$, $m(t) > 0$ pour $t > t_0$, non décroissante, $m'(t)$ continue, $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$, l'aut. retrouve sur une voie élémentaire (théorèmes de comparaison) certains résultats de Biernacki (ce Zbl. 6, 200), de Milloux (ibid. 9, 164), complète la démonstration d'Armellini (ibid. 11, 209) et donne le critère suivant: Soit $\{t_n\}$ une suite telle que $t_n < t_{n+1}$, $t_{n+1} - t_n \leq t_n - t_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, $\overline{\lim} (t_{n+1} - t_n)/(t_n - t_{n-1}) = 1$, soit $m'(\xi_n)/m(\xi_n)$ le minimum de $m'(t)/m(t)$ dans (t_n, t_{n+1}) ; si pour toute suite $\{t_n\}$ on a: $\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) m'(\xi_n)/m(\xi_n) = \infty$, alors on a pour chaque intégrale: $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Ce critère contient celui d'Armellini. Un autre critère suffisant: $m'(t) \geq A > 0$, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{m(t)}$ diverge. Critères analogues pour l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0$. W. Stepanoff (Moskau).

Tonelli, Leonida: Estratto di lettera al prof. Giovanni Sansone. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 404—405 (1936).

L'aut. complète un lacune dans la démonstration d'Armellini (ce Zbl. 11, 209). W. Stepanoff (Moskau).

Ascoli, Guido: Sul comportamento asintotico e sulla valutazione approssimata degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 617—635 (1936).

L'aut. étudie l'équation $\frac{dy}{dx} = g(x)y + f(x, y)$, le second membre défini pour x réel $\geq a$, y réel ou complexe, $|y| \leq b$, $\Re g(x) = g_1(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, 0)}{g_1(x)} = 0$, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \theta g_1(x) |y_2 - y_1|$, $0 \leq \theta \leq 1$. Il existe une et une seule intégrale tendant vers 0 pour $x \rightarrow \infty$; lorsque (*) $\int_{x_0}^{\infty} g_1(x) dx$ diverge, toute autre intégrale n'est pas prolongeable indéfiniment ($|y|$ devient $> b$); dans le cas de convergence de (*) toute intégrale $y(x)$ aux valeurs initiales x_0, y_0 ($x_0 > a' \geq a$, $|y_0| \leq b' \leq b$) existe pour $x \rightarrow \infty$, et on a: $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - C \exp(\int_{x_0}^x g(x) dx)) = 0$. Si $g_1(x) < 0$, les autres hypothèses conservées, toute intégrale avec x_0 suffisamment grand et $|y_0|$ suffisamment petit, existe pour $x \rightarrow \infty$; si (*) diverge, elle tend vers zéro; si (*) converge, — vers

$C \exp \left(\int_{x_0}^x g(x) dx \right)$. Extensions du premier théorème à l'équation $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, ainsi qu'aux fonctions g, f analytiques de x dans l'angle $\omega_1 < \arg x < \omega_2$. *W. Stepanoff*.

Andronov, A., et L. Pontrjagin: Systèmes grossiers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 247—250 (1937).

Le système (A) $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ est considéré dans un domaine G limité par un cycle sans contact g ; les trajectoires entrent dans G lorsque t croît; P et Q sont analytiques dans G . Soit (B) $\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y)$ le système altéré (p, q sont arbitraires, analytiques dans G). Le système (A) est dit grossier dans G si quel que soit $\eta > 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $|p|, |q|, |p'_x|, \dots, |q'_y|$ sont $< \varepsilon$, il existe une transformation topologique de G en lui même, les points correspondant étant distants de moins de η , qui fait correspondre aux points d'une même trajectoire de (A) les points d'une même trajectoire de (B). Pour que le système (A) soit grossier, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes: 1° les racines des équations caractéristiques dans chaque point d'équilibre ont leurs parties réelles inégales à zéro; 2° les exposants caractéristiques relatifs aux cycles limites sont différents de zéro; 3° il n'existe pas de trajectoires réunissant deux cols. Il n'existe que 11 types possibles de trajectoires dans un système grossier. Les trajectoires qui ne sont pas stables dans le sens de Liapounoff (L.), sont dites singulières (nœuds et foyers admissibles, cols, cycles limites admissibles, trajectoires passant par un col). Il n'existe dans G qu'un nombre fini de tr. sing., elles divisent G en un nombre fini de composantes. Les composantes intérieures à G contiennent des trajectoires stables (L.) dans les deux sens; leurs deux frontières sont des tr. sing. stables (L.) dans deux sens contraires; les trajectoires d'une composante attenant à g ainsi que la partie de la frontière constitué par une tr. sing., sont positivement stables (L.). Les structures de deux systèmes, (A_1) dans G_1 et (A_2) dans G_2 , sont identiques [il existe un homéomorphisme T entre G_1 et G_2 faisant correspondre aux trajectoires de (A_1) celles de (A_2)], s'il existe une transformation topologique T_1 transformant G_1 en G_2 , chaque tr. sing. de (A_1) en une tr. sing. de (A_2) ; de plus, à chaque élément d'attraction et de repulsion de (A_1) doit correspondre un élément de la même nature (ou de la nature inverse) de (A_2) ; la rotation sur les tr. fermées correspondantes se fait dans le même sens (ou dans le sens inverse).

W. Stepanoff (Moskau).

Leontovič, E., et A. Mayer: Sur les trajectoires qui déterminent la structure qualitative de la division de la sphère en trajectoires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 251—254 (1937).

Les trajectoires du système (A) $\frac{dx}{dt} = X(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Y(x, y)$, X et Y étant des polynômes sans facteur commun, sont représentées sur une sphère (projection stéréographique du pôle S considéré comme un point d'équilibre du système). Une trajectoire L est dite orbitalement stable si à tout $\varepsilon > 0$ on peut assigner un $\delta > 0$ (dépendant du point $M \in L$) tel que toute trajectoire traversant le δ -voisinage de M , se trouve dans le ε -voisinage de L pour $-\infty < t < \infty$. Le système (A) ne possède qu'un nombre fini de trajectoires orbitalement instables (trajectoires traversant au sens de Bendixson un point singulier, cycles limites; points d'équilibres, centres exclus, S inclus par définition). Ces trajectoires divisent la sphère en un nombre fini de régions („composantes“) qui sont au plus deux fois connexes; les trajectoires stables remplissant une composante ont le même caractère — elles sont toutes fermées ou bien elles ont les mêmes points limites ω et α . Le résultat principal: la condition nécessaire et suffisante pour que les structures qualitatives des trajectoires sur deux sphères B_1 et B_2 soient identiques, est l'existence d'une transformation topologique T_1 , qui transforme l'ensemble composé des trajectoires instables et d'une au moins trajectoire stable dans chaque composante de B_1 , dans l'ensemble correspondant de B_2 . En effet, cette condition remplit, on

construit une transformation topologique T , coïncidant avec T_1 sur les trajectoires instables et transformant chaque trajectoire de B_1 en une trajectoire de B_2 . Dans le cas présent, ainsi que dans celui des systèmes grossiers (v. le réf. précédent), la connaissance d'un nombre fini de trajectoires suffit pour caractériser la structure topologique du système.

W. Stepanoff (Moskau).

Pfeiffer, G.: Construction de l'intégrale de S. Lie de la classe supérieure d'après l'intégrale de S. Lie de la classe inférieure; en particulier, de l'intégrale de S. Lie d'après l'intégrale de Lagrange. Bull. Soc. Math. France **64**, 241—254 (1936).

Théodoreseco, N.: Les solutions élémentaires d'une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Rev. math. Union Interbalkan. **1**, 73—90 (1936).

Schluß des Beweises für den in dies. Zbl. **14**, 349 referierten Satz. W. Feller.

Germa, R. H. J.: Sur les dérivées par rapport à certains paramètres d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes $s = \Phi(x, y, z, p, q)$. Rev. Ci., Lima **38**, Nr 418, 129—153 (1936).

La fonction Φ est définie et continue, ainsi que ses dérivées $\Phi'_z, \Phi'_p, \Phi'_q$, dans le domaine (D) : $|x - \alpha| \leq a, |y - \beta| \leq b, |z - \gamma| \leq c, |p - \lambda| \leq l, |q - \mu| \leq m$. On se donne une fonction $\chi(x, y)$ représentant des valeurs aux limites; $\chi, \chi'_x, \chi'_y, \chi''_{xy}$ sont continus pour $|x - \alpha| \leq a, |y - \beta| \leq b$; χ'_x et χ'_y vérifient des conditions de Lipschitz. Alors la solution $z(x, y)$ de l'équation nommée au titre, vérifiant le long des caractéristiques les conditions $z(x_0, y) = \chi(x_0, y), z(x, y_0) = \chi(x, y_0)$, possède les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_0}, \frac{\partial z}{\partial y_0}$ pour $|x_0 - \alpha| < h, |y_0 - \alpha| < h, |x - \alpha| < h, |y - \alpha| < h$, où h , suffisamment petit, dépend du domaine (D) et des constantes relatives aux fonctions Φ, χ . Ces dérivées satisfont à l'équation aux variations

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \Phi'_z \xi + \Phi'_p \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi'_q \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

La démonstration est analogue à celles de Goursat (Cours d'Analyse, III, Ch. XXIII, XXVI).

W. Stepanoff (Moskau).

Piscounov, N.: Solution du premier problème aux limites pour l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial t} + su + f$. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 931—950 (1936).

Für die im Titel angegebene Gleichung behandelt Verf. eine Randwertaufgabe, die analog der ersten Randwertaufgabe für diejenige parabolische Gleichung ist, die man erhält, wenn $a_2 \equiv 0$ ist und die übrigen Koeffizienten nur von x und t abhängen; dabei schließt er sich an diejenige Methode zur Behandlung der letztgenannten Aufgabe an, bei der man die Ableitung nach x durch den entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt.

E. Rothe (Breslau).

● **Freda, Hélène:** Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Mém. Sci. math. Fasc. **84**, 81 pag. Paris (1937).

Kap. I enthält allgemeines über lineare hyperbolische Gleichungen 2. Ordnung, Cauchysches Problem, Charakteristiken, Reziprozitätsformel. Kap. II ist der Riemannschen Methode für die Gleichungen in 2 Variablen, nebst mechanischen und physikalischen Anwendungen gewidmet. Kap. III gibt eine ausführliche Darstellung der Volterraschen Untersuchungen über die Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = f(x, y, t),$$

in welchen die Einführung der charakteristischen Kegel und die Spiegelungsmethode eine grundlegende Rolle spielen; das von Volterra herrührende, besondere Schwierigkeiten bietende äußere Problem wird auch eingehend studiert. In Kap. IV finden sich die von Tedone und Coulon gegebenen Verallgemeinerungen der Volterraschen Methode und Ergebnisse. Im Kap. V wird endlich über die Hadamardsche Theorie der allgemeinen linearen hyperbolischen Gleichung vom Normaltypus berichtet.

G. Cimmino (Napoli).

Picone, Mauro: Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, 105—112 (1936).

Nicolesco, Miron: Sur un nouveau théorème de moyenne pour les fonctions polynômes harmoniques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, 113—116 (1936).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Wirtinger, W.: Berichtigung zu der Abhandlung: „Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie“. In diesen Sitzungsberichten, Abt. IIa, 145. Band, 1. u. 2. Heft, 1936, p. 95—99. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1936, 529 (H. 7/8).

Vgl. dies. Zbl. 15, 66.

Epstein, Paul S.: On the equation of diffusion. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 94—98 (1937).

Die bekannten Untersuchungen Kolmogoroffs über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (dies. Zbl. 1, 149) hätten nach Ansicht des Verf. mehr Aufmerksamkeit erweckt, wenn der physikalische Sinn seiner zweiten Differentialgleichung ebenso klar wäre, wie es für die erste der Fall ist. Verf. versucht dieses Problem zu lösen, indem er die zwischen den beiden Gleichungen bestehende Asymmetrie mit dem zweiten Satz der Thermodynamik in Zusammenhang bringt. Es wird auch der physikalische Sinn der in die Gleichung eingehenden Parameter erläutert.

A. Khintchine (Saratow).

Schwerdtfeger, Hans: Eine Bemerkung über die Differentialgleichung der Diffusion unter Einwirkung äußerer Kräfte. Mh. Math. Phys. 45, 169—174 (1937).

Die lineare Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + v \frac{\partial y}{\partial x},$$

wo $y = y(x, t)$ die Konzentration des diffundierenden Stoffes, D den Diffusionskoeffizienten und v die Geschwindigkeit der durch Einwirkung äußerer Kräfte entstehenden Strömung bedeutet, kann mittels einer Transformation der Gestalt $y = z e^{\varphi(x, t)}$ auf die „strömungsfreie“ Form $\frac{\partial z}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ gebracht werden, wenn D und v zeitlich und örtlich unveränderlich sind. Es wird nun gezeigt, daß dasselbe Ergebnis außer für $v = \text{Konst.}$ noch für eine und nur eine Form der Ortsfunktion $v = v(x)$ gültig bleibt; diese Form wird explizit dargestellt und diskutiert. Zum Schluß wird auch der Fall eines örtlich veränderlichen D untersucht.

A. Khintchine (Saratow).

Rice, S. O.: Series for the wave function of a radiating dipole at the earth's surface. Bell Syst. Techn. J. 16, 101—109 (1937).

Verf. geht von der Sommerfeldschen Integraldarstellung für das Hertz'sche Potential des obengenannten Dipolfeldes aus. Für dieses Integral leitet er asymptotisch für große Abstände vom Dipol einen Reihenausdruck ab. Bei der Berechnung macht Verf. Gebrauch von einer Darstellung dieses Integrals, welche von der Pol gegeben hat. Diese neue Integraldarstellung kann in der komplexen Ebene in zwei Bestandteile zerlegt werden, die asymptotisch durch mehrfache partielle Integration berechnet werden können. Die so gewonnene Darstellung schreitet nach negativen ganzen Potenzen des Abstandes vom Dipol fort. Verf. leitet in ähnlicher Weise noch eine zweite Darstellung ab, welche nach positiven ganzen Potenzen dieses Abstandes fortschreitet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Coulson, C. A.: The evaluation of certain integrals occurring in studies of molecular structure. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 104—110 (1937).

Bei Untersuchungen über die Elektronenstruktur von Molekeln treten Integrale

$$\int \frac{1}{r_1} \psi_B \psi_C d\tau$$

auf, wo r_1 der Abstand des Raumelementes $d\tau$ von einem festen Punkt A ist, ψ_B und ψ_C Werte der Atomeigenfunktionen mit den festen Mittelpunkten B und C an der

Stelle $d\tau$ sind, also Funktionen der Abstände r_2 und r_3 von B und C und von Winkeln in diesen Punkten. Für den Fall $AB = BC$ und Funktionen ψ_B und ψ_C vom Typus $e^{-br_2}, r_2 e^{-br_2}, r_3 e^{-cr_3}, r_3 \cos e^{-cr_3}$ wird eine Methode der Auswertung angegeben, die auf einer Entwicklung von $\frac{1}{r_1}$ nach Potenzen von $\frac{1}{r_3}$ und von ψ_B nach geeigneten Funktionen von r_3 beruht. F. Hund (Leipzig).

Tonolo, Angelo: *Integrazione con quadrature di un particolare sistema di Dirac* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 195—206 (1936).

Ein Sonderfall der vom Verf. anderswo (dies Zbl. 16, 28) entwickelten Verfahren und Ergebnisse. G. Cimmino (Napoli).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

German, R.-H.-J.: Sur la fonction de Riemann associée à une équation intégral-différentielle linéaire du second ordre, à deux variables indépendantes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 192—197, 210—214 u. 247—253 (1936).

Methode der sukzessiven Approximationen und Riemannsche Funktion für eine besondere lineare partielle Integro-Differentialgleichung 2. Ordnung von hyperbolischem Typus. Gesucht wird (im kleinen) eine Lösung $z(x, y)$ mit vorgegebenen Werten für $x = x_0$ und $y = y_0$ (die Gleichung ist übrigens einer gewöhnlichen Volterraschen Integralgleichung 2. Art für die gemischte Ableitung z_{xy} äquivalent. Ref.). Cimmino.

Bochner, S., and S. Izumi: Some general convergence theorems. Tôhoku Math. J. 42, 191—194 (1936).

Let $f(\xi)$ be continuous at $\xi = x$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| (1 + |\xi|)^{-1} d\xi < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi < \infty$. The authors prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \xi) K(n\xi) d\xi = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi$$

provided that, in addition, either

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^p (1 + |\xi|)^{-1} d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi^{q-1} K^q(\xi)| d\xi < \infty, \quad p > 1, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

or $|\xi K(\xi)| \leq B = \text{const.}$ This result extends some previous work by the authors (Izumi, this Zbl. 11, 61; Bochner, Vorles. über Fouriersche Integrale, 1932, 20, Satz 3).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Doetsch, Gustav: Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen. Math. Ann. 113, 665—676 (1937).

The author applies the method developed by him for treatment of the theory of Watson's "general transforms", which he calls "involution transformations" (this Zbl. 15, 22) to derive various propositions, partly known in the literature, concerning "self-reciprocal" functions, "resultants" of two Fourier kernels, vanishing of an involution transform of a given function over an interval (x_0, ∞) , and asymptotic behavior of involution transforms.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Günther, N.: Sur une intégrale analogue à l'intégrale de Fourier. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 301—303 (1936).

Proof of redundancy of a condition of a theorem stated in a previous paper (this Zbl. 15, 22).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Levi, Enzo: Proprietà caratteristiche della trasformazione di Laplace. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 422—426 (1937).

Let $L[F(t)]$ be a linear (= distributive) transformation taking a continuous function $F(t)$, $a \leq t \leq b$, into a function $f(s)$ such that (I) for fixed s , $|f(s)| < M(s) \|F(t)\|$, and (II) for a differentiable $F(t)$

$$L[F'(t)] = sL[F(t)] + F(b)e^{-sb} - F(a)e^{-sa},$$

then

$$L[F(t)] = \int_a^b e^{-st} F(t) dt,$$

i.e., this is a characteristic property of the Laplace transformation. Generalizations.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Avakumović, V. G.: *Théorèmes relatifs aux intégrales de Laplace sur leur frontière de convergence.* C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 224—226 (1937).

Let $A(u)$ be real, further suppose that

$$(C_k) \quad \liminf_{u \rightarrow \infty} \min_{u < u_1 < U} [A(u_1) - A(u)] = -w(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$U = u + \varepsilon \sqrt[k]{u}$ for some $k \geq 1$, and let

$$J(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u) du, \quad s = \sigma + it$$

converge for every $\sigma > 0$. It is known that $A(u) \rightarrow 0$ with $1/u$ if either (Landau-Wiener): $|J(s)| < M(\lambda)$, $0 < \sigma < \sigma_0$, $|t| \leq \lambda$, and (C_k) holds with $k = \infty$, or (Littlewood-Schmidt): $|J(s)| < M$, $0 < \sigma$, and (C_k) holds with $k = 1$. Karamata has surmised that the conclusion is valid for an arbitrary k provided $J(s)$ is bounded in a convex domain whose boundary has a contact of order $k - 1$ with the imaginary axis at $s = 0$. The author sketches a proof of this theorem for $k = 2$. The main step is the observation that the hypotheses imply that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty A(u) u^{-1/2} e^{-(x-u)^2/u} du = 0.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Köthe, Gottfried: *Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes.* Math. Ann. **114**, 99—125 (1937).

Der Versuch, eine Auflösungstheorie linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten aufzustellen, erscheint am aussichtsvollsten für lineare vollkommene Koordinatenräume [hierzu und hinsichtlich der Grundlagen vgl. Köthe-Toeplitz, J. reine angew. Math. **171**, 193 (1934); dies. Zbl. **9**, 257]. Die Koeffizientenmatrix \mathfrak{A} eines linearen Gleichungssystems ordnet dem vollkommenen Koordinatenraum λ einen Teilraum, den Bildraum $\mathfrak{A}(\lambda)$, zu. Die Kenntnis aller Teilräume μ von λ ist daher wesentliches Hilfsmittel für die Gleichungstheorie, und es interessiert daher die Frage, wann zwei Teilräume μ und ν von λ durch eine eindeutige umkehrbarstetige Transformation ineinander übergeführt werden können, d. h. μ und ν ähnlich sind; zweitens, wann dies durch eine solche Transformation geschehen kann, die zugleich λ auf sich abbildet, d. h. μ und ν kongruent sind. Da aber — wie man leicht sieht — nicht alle Teilräume eines vollkommenen Raumes λ als Bildräume $\mathfrak{A}(\lambda)$ auftreten können, genügt es, hinsichtlich der Auflösungstheorie sich darauf zu beschränken, diejenigen linearen Teilräume μ von λ hinsichtlich Kongruenz und Ähnlichkeit zu untersuchen, die Bildräume $\mathfrak{A}(\lambda)$ sind. In der vorliegenden Arbeit werden nun eine Reihe von Invarianten angegeben, die einerseits gestatten, die bekannten Auflösungstheorien vollkommener linearer Koordinatenräume hinsichtlich ihrer Unterschiede besser zu verstehen, andererseits als Hilfsmittel für eine allgemeine Auflösungstheorie geeignet erscheinen. 1. Ist μ' der Raum, der aus μ durch Hinzunahme aller Grenzstellen von konvergenten Folgen aus μ entsteht, so gilt $\mu' \supseteq \mu$; es braucht aber noch nicht bei analoger Bezeichnungsweise $\mu'' = \mu'$ zu sein, vielmehr kann dieser Prozeß transfinit fortgesetzt werden, und die Ableitungszahl α , d. h. die erste Ordnungszahl, für die $\mu^{(\alpha)} = \mu^{(\alpha+1)}$ wird, kann im allgemeinen eine beliebige Zahl der zweiten Zahlklasse sein und stellt eine Invariante von μ dar, desgl. Dimension und Typus der Differenzenräume $\mu' - \mu$, $\mu'' - \mu'$, . . .; $\alpha = 0$ bedeutet: μ ist abgeschlossen. 2. Bezeichnet man mit $\bar{\mu}$ den Orthogonalraum von μ und mit $\bar{\bar{\mu}}$ den von $\bar{\mu}$, so gilt $\bar{\bar{\mu}} \supseteq \mu$. $\bar{\bar{\mu}}$ ist abgeschlossen, es gilt hingegen nicht allgemein $\bar{\bar{\mu}} = \mu^{(\alpha)}$. $\bar{\bar{\mu}}$ ist nämlich nicht nur abgeschlossen, sondern „vollabgeschlossen“ (s. die oben zit. Arb.), und es wird gezeigt, daß für vollabgeschlosse-

nes μ gilt: $\bar{\mu} = \mu$ (Orthogonalraumsatz), womit eine weitere Invariante gewonnen ist.
 3. Wenn $\mu \leq \lambda$, so heißt $\nu \leq \lambda$ Komplementärraum von μ , wenn jede Stelle ξ aus λ sich eindeutig als Summe von Stellen η aus μ und ζ aus ν darstellen läßt und aus der Konvergenz $\xi^{(n)} = \eta^{(n)} + \zeta^{(n)}$ gegen $\xi = \eta + \zeta$ stets auf die Konvergenz von $\eta^{(n)}$, $\zeta^{(n)}$ gegen η bzw. ζ geschlossen werden kann. Wenn μ einen Komplementärraum hat, so ist μ vollabgeschlossen, da aber die Umkehrung nicht gilt, ist damit eine weitere Invariante gefunden. Ulm (Münster i. W.).

Hagemann, Elisabeth: Das Reziprokentheorem in beliebigen linearen Koordinatenräumen. Math. Ann. 114, 126—143 (1937).

Verf. überträgt das Toeplitzsche Reziprokentheorem für den Hilbertschen Raum σ_2 auf beliebige vollkommene lineare Koordinatenräume. Die ursprüngliche Fassung dieses Theorems lautet: Ist $\mathfrak{A} = (a_{pq})$ eine im Hilbertschen Sinne beschränkte Matrix und ist das Infimum der positivdefiniten Hermiteschen Form $\bar{\xi} \mathfrak{A}^* \mathfrak{A} \xi = \sum_{p,q} \sum_n \bar{a}_{np} a_{nq} x_p x_q$

bei $\bar{\xi} \xi = 1$ größer als Null, so besitzt \mathfrak{A} eine beschränkte linke Reziproke und umgekehrt. Sowohl der ursprüngliche Beweis, wie auch alle späteren, sind auf den Hilbertschen Raum zugeschnitten. Will man ein ähnliches Theorem für beliebige Koordinatenräume aufstellen, so muß auch die Formulierung des Theorems erst abgeändert werden, da im allgemeinen sich $\mathfrak{A}^* \mathfrak{A}$ nicht bilden läßt. Das Infimum von $\bar{\xi} \mathfrak{A}^* \mathfrak{A} \xi$ ist aber das Quadrat von $m = \inf_{\xi \neq 0} \frac{|\mathfrak{A} \xi|}{|\xi|}$. Ist λ ein beliebiger vollkommener Koordinatenraum,

\mathfrak{A} aus $\sum(\lambda)$, d. h. aus dem Ring der Matrizen, die λ in sich transformieren (vgl. vorst. Ref. und dort zit. Lit.), so heiße \mathfrak{A} nach unten beschränkt — abgekürzt: n. u. b. — (stark nach unten beschränkt — abgekürzt: st. n. u. b.), wenn die Konvergenz (starke Konvergenz) von $\eta^{(n)} = \mathfrak{A} \xi^{(n)}$ gegen 0 stets die Konvergenz (starke Konvergenz) von $\xi^{(n)}$ gegen 0 zur Folge hat. Das Reziprokentheorem läßt sich dann zunächst für $\sum(\lambda)$ in der Form aussprechen: Ist \mathfrak{A} aus $\sum(\lambda)$ nach unten beschränkt (st. n. u. b.), so besitzt \mathfrak{A} in $\sum(\lambda)$ eine linke Reziproke und umgekehrt. Die Umkehrung ist immer richtig. Hingegen gilt: \mathfrak{A} aus $\sum(\lambda)$ besitzt dann und nur dann eine linke Reziproke, wenn \mathfrak{A} n. u. b. ist und $\mathfrak{A}(\lambda)$ einen Komplementärraum besitzt. In allen Räumen, in denen jede beschränkte unendliche Menge von Stellen eine konvergente Teilfolge besitzt, fallen n. u. b. und st. n. u. b. Matrizen zusammen, es gilt daher der entsprechende Satz für st. n. u. b. Matrizen in diesen Räumen. Da der Komplementärraumsatz in vielen Räumen nicht gilt, sei folgende Teilaussage des Reziprokentheorems noch hervorgehoben: Ist in λ jeder abgeschlossene Teilraum vollabgeschlossen und ist \mathfrak{A} n. u. b. oder st. n. u. b., so ist entweder \mathfrak{A} intakt, oder $\mathfrak{A} = 0$ besitzt eine nichttriviale Lösung. Ulm (Münster i. W.).

Kantorovič, L.: On the sequences of linear operations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 255—259 (1937).

Einige Sätze über die Bedingungen, unter welchen eine Folge von linearen Operationen in einem halbgeordneten Raum beschränkt oder konvergent ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Visser, Cornelis: Note on linear operators. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 270—272 (1937).

Ein einfacher Beweis des Hauptteiles des F. Rieszschen Zerlegungssatzes für beschränkte Hermitesche Operatoren: $A = R - S$ mit $RS = 0$, wo R, S beschränkte definite Operatoren sind, die mit jedem mit A vertauschbaren Operator vertauschbar sind. Die Grundidee ist die gleiche wie in dem Beweis von F. J. Wecken (s. dies. Zbl. 10, 304), die benutzten Hilfsmittel teilweise andere. Vor allem wird $B = R + S$ als positiv definite Lösung von $B^2 = A^2$ nicht wie bei Wecken durch eine binomische Reihe, sondern als Limes einer monotonen, nicht abnehmenden Operatorenfolge dargestellt. Ist übrigens die obere Schranke von A größer als 1, so müssen die Formeln der Arbeit in leicht anzugebender Weise modifiziert werden. Hellinger.

Sz. Nagy, Béla v.: Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum. *Acta Litt. Sci. Szeged* 8, 166—176 (1937).

Let \mathfrak{M} be a finite or infinite interval of the real x -axis, $\alpha(x)$ a monotone increasing measure function and \mathfrak{L}_2 the class of all functions defined over \mathfrak{M} , measurable with respect to $\alpha(x)$, and for which the integral $\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 d\alpha(x) < \infty$. It is well known

that \mathfrak{L}_2 is isometric with an abstract Hilbert space \mathfrak{H} . The author finds necessary and sufficient conditions in order that a subset \mathfrak{h} of \mathfrak{H} would correspond to the subclass of all characteristic functions of \mathfrak{L}_2 , that is functions which assume only values 0 and 1. By using the notation $\varphi_1 \prec \varphi_2$ when $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_1)$ these conditions are as follows: 1. \mathfrak{h} determines \mathfrak{H} (that is the set of all finite linear combinations of elements of \mathfrak{h} is dense in \mathfrak{H}). 2. The difference $f - g \in \mathfrak{h}$ if and only if $g \prec f$. 3. To each pair f, g there exists a pair of elements h, k such that $f + g = h + k$ and $h \prec f, h \prec g$. 4. \mathfrak{h} is "closed" in the sense that the limit of every "monotone" sequence $\{f_n\}$, $f_n \prec f_{n+1}$, belongs to \mathfrak{h} . Here the greek letters denote unrestricted elements of \mathfrak{H} , while the latin letters refer only to elements of \mathfrak{h} .

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Mimura, Yukio: Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum. *Jap. J. Math.* 13, 119—128 (1937).

J. v. Neumann und F. Riesz haben Bedingungen dafür angegeben, daß ein beschränkter oder hypermaximaler Operator eine Funktion eines gegebenen Hermiteschen hypermaximalen Operators ist (s. dies. Zbl. 12, 22). In vorliegender Arbeit wird weitergehend für einen beliebigen linearen Operator A , von dem nicht einmal Fortsetzbarkeit in einen abgeschlossenen Operator vorausgesetzt wird, der Satz aufgestellt: A besitzt eine Funktion eines Hermiteschen hypermaximalen Operators H als Fortsetzung, wenn es mit jedem mit H vertauschbaren beschränkten Operator vertauschbar ist; dabei ist unter Funktion ein in bekannter Weise durch ein Integral über den Spektraloperator E_λ von H darstellbarer Operator verstanden. Verwendet werden Ideen des Rieszschen Beweises, jedoch der Operatorenkalkül, insbesondere die Reduktion der Operatoren durch die E_λ bzw. die zugehörigen linearen Teilmengen des unendlich-dimensionalen Raumes, systematisch benutzt. Der Beweis wird für den Fall eines H mit einfachem Spektrum vollständig dargestellt und dann der allgemeine Fall darauf zurückgeführt. Schließlich wird in Ausdehnung eines Satzes von M. H. Stone gezeigt, daß ein A mit einer abgeschlossenen Fortsetzung eine Funktion eines H mit einfachem Spektrum bereits dann ist, wenn es mit der Schar von dessen Spektraloperatoren E_λ vertauschbar ist.

Hellinger (Frankfurt a. M.).

Graffi, Dario: Considerazioni sul metodo degli operatori funzionali. *Mem. Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei*, III. s. 2, 211—262 (1936).

L'Autore presenta una rielaborazione della teoria degli operatori funzionali dovuta a G. Giorgi [Il metodo simbolico per lo studio delle correnti variabili, *Atti dell' Ass. elettrotecn. it* 8 (1904); Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica, *ibidem* 9 (1905); The functional dependence of physical variables, *Proceedings of the Intern. Math. Congress in Toronto* 2]. È noto che, seguendo criteri convenienti, si può associare ad ogni funzione analitica $f(\omega)$ della variabile complessa ω un operatore $f(\Delta)$ che muta ogni funzione $V(t)$ della variabile reale t in una funzione $W(t)$. Il Giorgi ha proposto un metodo di valutazione dell'operatore $f(\Delta)$ assegnando le condizioni che conducono ad una valutazione ben determinata fra tutte le possibili. Le modificazioni proposte dall'Autore mirano a rendere meno generale, ma più preciso il campo di applicazione degli operatori funzionali: esse si fondano su di una classificazione delle funzioni $V(t)$ sulle quali si opera e su di una ben determinata scelta delle funzioni $f(\omega)$ che generano gli operatori. — Una $V(t)$ dicesi di classe zero se è nulla per $t < 0$ ed è generalmente continua e a variazione limitata in ogni intervallo $(0, T)$, qualunque sia $T > 0$. — Una $V(t)$ dicesi di classe m (essendo m intero positivo) se è derivabile m volte, è nulla insieme con le sue derivate

fino all'ordine $m - 1$ per $t < 0$ e la derivata di ordine m è di classe zero. — Una funzione analitica $f(\omega)$ della variabile complessa ω che è uniforme e regolare a destra di una retta r parallela all'asse immaginario (escluso il punto all' ∞) dicesi di classe negativa $-\rho$, se si può assegnare un numero $M > 0$ tale che a destra di r si abbia $|f(\omega)| < \frac{M}{|\omega|^\rho}$. Una $f(\omega)$ dicesi di classe zero se è del tipo

$$f(\omega) = f_1(\omega) + \sum_{1 \leq r}^n C_r e^{-h_r \omega},$$

dove la f_1 è di classe negativa e le C_r, h_r sono quantità reali non negative assegnabili. Una $f(\omega)$ è di classe positiva m se la $f(\omega)/\omega^m$ è di classe zero. — Un operatore $f(\Delta)$ associato alla funzione $f(\omega)$ è di classe negativa, nulla o positiva secondo che tale è la $f(\omega)$. — Se si pone

$$A(\omega, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T e^{-\omega \zeta} V(\zeta) d\zeta,$$

l'Autore propone per la definizione dell'operatore $f(\Delta)$ associato ad $f(\omega)$ la relazione

$$f(\Delta) V(t) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(\omega) e^{\omega t} e^{\alpha \omega^2} A(\omega, T) d\omega, \quad (*)$$

dove la retta $c - i\infty, c + i\infty$ oltre ad essere a destra dell'asse immaginario è anche a destra della retta r che limita la regione in cui la $f(\omega)$ risulta regolare. — Un confronto è istituito tra questo modo di definire $f(\Delta)$ e la valutazione del Giorgi espressa da

$$f(\Delta) V(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \int_C Q(\alpha, \omega) f(\omega) e^{\omega t} d\omega \int_{-T}^T V(\zeta) e^{-\omega \zeta} d\zeta,$$

dove l'integrazione rispetto ad ω è fatta lungo la semicirconferenza C di destra, mentre $Q(\alpha, \omega)$ è una funzione analitica intera di α, ω (fattore di convergenza) tale che $Q(0, \omega) = 1$ e che per $\alpha > 0$ è infinitesima per $\omega \rightarrow c \pm i\infty$ di ordine sufficientemente elevato. — L'Autore mostra come il passaggio a limite, indicato con (*), dia un risultato ben determinato quando $f(\omega)$ appartenga all'insieme delle funzioni di classe negativa, nulla o positiva. Segue lo studio di operatori particolari e specialmente di quelli suscettibili di una rappresentazione del tipo

$$f(\Delta) V(t) = \int_0^t G(t - \zeta) V(\zeta) d\zeta;$$

la Memoria contiene la dimostrazione di alcune proprietà generali degli operatori e applicazioni all'integrazione di equazioni a derivate parziali. *G. Lampariello.*

Pincherle †, Salvatore: Contributo alla teoria degli operatori lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 15, 243—308 (1936).

L'Autore espone una trattazione sistematica della teoria degli operatori lineari di cui a più riprese in un lungo intervallo di anni ha avuto occasione di tracciare le linee fondamentali. — Si considera uno spazio S ad infinite dimensioni i cui elementi sono vettori definiti con una base opportunamente scelta. — Fissato un operatore come fondamentale, si definisce lo scarto da esso di qualunque altro operatore e si dimostra che l'operazione di scarto presenta notevoli analogie con l'operazione di derivazione. Queste analogie presentano caratteri notevoli quando per operatore fondamentale si assume quello θ già studiato dal Casorati. Se si assume per base dello spazio S la successione delle potenze nulla ed intere positive di una variabile x e per operatore fondamentale la moltiplicazione per x , lo scarto rispetto a questo dà luogo alla nozione di derivata funzionale di cui l'Autore studia le interessanti proprietà. *Lampariello.*

Pincherle, Salvatore: Alcune osservazioni sulle serie di potenze del simbolo di derivazione. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 1—4 (1936).

Nel calcolo delle successioni sviluppato recentemente da A. Mambriani [Sull'algebra delle successioni, Ann. Mat. pura appl. 8, 9 (1930, 1931)] e R. Lagrange [Sur

un algorithme des suites, C. r. Acad. Sci., Paris **184**, 1405—1407 (1927); Sur certaines suites de polynomes, *ibid.* **185**, 175—178 (1927); *ibid.* **444—446**], conviene associare alla successione (1) a_0, a_1, a_2, \dots la serie di potenze $\sum_0^\infty a_n x^n$, ma si presenta una difficoltà quando il raggio di convergenza di questa sia nullo. — L'Autore mostra come invece sia preferibile considerare insieme con la successione (1) l'operatore A definito da

$$A = a_0 + a_1 D + \frac{a_2}{2!} D^2 + \frac{a_3}{3!} D^3 + \dots$$

in cui D è il simbolo di derivazione. — L'operatore A è applicabile formalmente a qualunque funzione indefinitamente derivabile $\varphi(x)$ della variabile x . L'espressione di A ha significato effettivo qualunque sia la successione (1) in uno spazio funzionale che comprende in particolare la totalità dei polinomi razionali interi in x . — Si mostra come il calcolo con operazioni di somma, prodotto, quoziente sugli operatori del tipo A sia analogo a quello delle serie di potenze. G. Lampariello (Roma).

Variationsrechnung:

Tonelli, L.: *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 180—187 (1936).

Suppose that a curve $C_0: x = x_0(s), y = y_0(s)$ gives the least final value to u in a given class K of curves, u being required to satisfy the equation $u' = F(x, y, x', y', u)$. F is supposed continuous with its first partial derivatives and is positively homogeneous of degree 1 in (x', y') , and α_0 is an "arc of indifference" of C_0 ; that is, an arc of C_0 such that every curve obtained from C_0 by replacing α_0 by a nearby arc with the same end-points is also a curve of the given class K . Then

$$\int_0^s F_x \psi ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_x \psi ds = c_1, \quad \int_0^s F_y \psi ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_y \psi ds = c_2, \\ \psi(s) \equiv \exp \left\{ - \int_0^s F_u(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u) ds \right\}.$$

The proof is similar to proofs already in the literature. The equations are given two other equivalent forms, one of which is that previously established by Manià (this Zbl. **14**, 69) under somewhat more restrictive hypotheses. — The analogues for the ordinary problem are established. Here, as is usual, it is supposed that $N\{1 + |y'| + |f(x, y, y', u)|\}$ exceeds $|f_y|$ and $|f_u|$ for nearby y and u . McShane.

Tonelli, L.: *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 239—245 (1936).

The first problem considered is that of minimizing $\int G(x, y, x', y', u) ds$ in a class of curves $x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq L$ satisfying $u' = F(x, y, x', y', u)$. The Euler-Lagrange equations are established, with a specific formula for the multiplier $\lambda(s)$, on each "arc of indifference" (see review above) of the minimizing curve. Next, with suitable restrictions on the derivatives f_y, f_u, g_y and g_u , the analogous results are established for the non-parametric problem. By use of the standard theorems on differential equations the proof is made shorter than that of Manià (this Zbl. **15**, 26; cf. also Graves, this Zbl. **2**, 140). The theorem applies for example to the problem of minimizing $\int G ds$ in the class of all curves satisfying the equation $u' = F(x, y, x', y', u)$ and the end-conditions $\varphi_i(x(0), y(0), x(L), y(L), u(0)) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; m \leq 5)$;

but these end-conditions must in general be independent of $u(L)$. McShane.

Tonelli, L.: *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 399—404 (1937).

This note states theorems (without proof) on the semi-continuity of solutions of differential equations depending on arbitrary curves or functions, of the form

$u' = F(x, y, x', y', u)$ or $u' = f(x, y, y', u)$. The functions F and f are not required to be monotone in u (as previously assumed in proofs by Manià (this Zbl. 10, 119) and Graves (this Zbl. 14, 316) but instead are subjected to a Lipschitz condition. Graves (Chicago).

Radon, Johann: *Bewegungsinvariante Variationsprobleme, betreffend Kurvenscharen.* Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 70—82 (1937).

Ein Stück V des dreidimensionalen euklidischen Raumes sei einfach und lückenlos von einer Kurvenschar überdeckt und es sei $\kappa = \kappa(x_1, x_2, x_3)$ die Krümmung derjenigen Kurve der Schar, die durch den Punkt x_1, x_2, x_3 von V hindurchgeht, genommen in diesem Punkt; mit t, n, b seien Tangenten-, Hauptnormalen-, Binormalenvektor bezeichnet. Dann wird zunächst nach den Extremalen des Problems $\delta \int_V \kappa^2 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$ gefragt. Die Extremalenschar genügt der Beziehung

$\frac{dt}{db} = \tau n - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \cdot b$, wenn $\frac{d}{db}$ Differentiation in Richtung der Binormalen, $\frac{d}{ds}$ Differentiation in Richtung des Tangentenvektors bedeutet. Fragt man speziell nach Extremalscharen, die aus ebenen Kurven bestehen, so ergibt sich: Die Kurven ebener Extremalscharen verteilen sich auf ∞^1 Flächen, nämlich a) auf Drehzylinder als Träger von ∞^1 Kreisen und b) auf Drehflächen als Träger von ∞^1 Meridianen. Im Falle des zweidimensionalen Problems $\delta \int_B \kappa^2 dx dy = 0$ wird darüber hinaus ausführlich

die Frage nach der Existenz des Minimums behandelt. (Die Extremalen sind hier Kreise.) Bezeichnet $z = z(x, y)$ den Winkel, den der Tangentenvektor der Schar im Punkt x, y mit der positiven x -Achse einschließt, so ergibt sich für z das Problem $\int_B \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos z + \frac{\partial z}{\partial y} \sin z \right)^2 dx dy = \text{Min.}$ Man beachte, daß für den Integranden

$f(z, p, q) = (p \cos z + q \sin z)^2$ identisch $f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 = 0$ gilt. — Das zugrunde gelegte Variationsproblem $\int \int \kappa^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \text{Min.}$ ist offenbar ein bewegungsinvariantes Variationsproblem erster Ordnung bezüglich des Vektorfeldes $t(x_1, x_2, x_3)$; alle derartigen Variationsprobleme werden angegeben. Rellich (Marburg, Lahn).

Carathéodory, C.: *Bemerkungen zu den Strahlenabbildungen der geometrischen Optik.* Math. Ann. 114, 187—193 (1937).

Die geometrische Optik ist eine Abbildung der Geraden des Dingraums auf die Geraden des Bildraums, die sich im Sinne Hamiltons besonders einfach kennzeichnen läßt, wenn man die Geraden im Dingraum wie im Bildraum je als Extremalen eines Variationsproblems (des Fermatschen Prinzips $\int n ds = \text{Extrem}$) auffaßt. Verf. knüpft, um die Zuordnung der Geraden des Dingraums zu denen des Bildraums zu beherrschen, an die Poincarésche relative Integralinvariante an, die für zwei von zugeordneten Strahlen des Ding- und Bildraums gebildete Röhren den gleichen Zahlwert haben muß. Insbes. greift er aus der Gesamtheit der Geraden des Dingraums eine Geradenkongruenz heraus, indem er den einen Mantel der Brennfläche und die zugehörige Gratlinienschar der abwickelbaren Flächen willkürlich vorgibt. Zieht er auf dem Brennflächenmantel nun eine geschlossene Kurve und ersetzt für die so bestimmte Röhre der Kongruenzgeraden die zugehörige relative Integralinvariante durch die entsprechende absolute Integralinvariante, so erhält man ein Doppelintegral über das von der geschlossenen Kurve umrandete Gebiet des Mantels, dessen Integrand für jeden Punkt des Gebietes gleich der geodätischen Krümmung der Gratlinie ist. Bei der zugeordneten Geradenkongruenz des Bildraums bestimmt nun die Bildröhre auf einem Mantel der Brennfläche ebenfalls eine geschlossene Kurve, und die absolute Integralinvariante ist gleich dem Doppelintegral über den von dieser Kurve umrandeten Bereich, dessen Integrand wieder die geodätische Krümmung der Gratlinien dieses Mantels ist. In differentieller Schreibweise lautet so das „allgemeine Brechungsgesetz“: $k_g d\omega = k_g^* d\omega$. — In der gleichen Weise, wie man einen Brennflächenmantel des Dingraums auf einen

Brennflächenmantel des Bildraums bezogen hat, kann man auch in dem gleichen Raume die beiden Brennflächenmäntel einer Geradenkongruenz aufeinander beziehen. Da hierbei das Verhältnis der geodätischen Krümmungen der Gratlinien gleich dem Verhältnis ihrer gewöhnlichen Krümmungen ist, gilt $k d\omega = k^* d\omega'$, eine Beziehung, die auch im Falle einer Normalenkongruenz brauchbar bleibt, wo die Gratlinien zu geodätischen Linien des Brennflächenmantels werden. — Auf Grund dieser Ergebnisse, die sich mit alten Überlegungen Darboux' (Th. d. surf. 3, 140 ff.) berühren, läßt sich die allgemeinste Kongruenz des Bildraums, die einer gegebenen Kongruenz des Dingraums zugeordnet werden kann, folgendermaßen kennzeichnen: Im Bildraum kann man willkürlich einen Brennflächenmantel vorgeben und seine Punkte willkürlich den Punkten des Brennflächenmantels des Dingraums zuordnen. Dann kennt man auf dem Mantel des Bildraums aus dem allgemeinen Brechungsgesetz in den einzelnen Punkten die geodätische Krümmung der zugehörigen Gratlinien. Man hat also nur, um die Bildkongruenz zu erhalten, auf der gewählten Fläche eine Schar von Kurven mit der vorgeschriebenen geodätischen Krümmung zu bestimmen und an sie die Tangenten zu legen. Die Frage, wann die Gratlinien c^* die Bilder der Gratlinien c sind, bildet den Abschluß der Betrachtung. — Die Ergebnisse werden dann — ganz im Sinne Hamiltons — von der Strahlenoptik auf beliebige Variationsprobleme übertragen („Lichtwegraum“ als allgemeiner „Finslerscher Raum“). Auch hier gibt man zunächst im „Dingraum“ eine Fläche mit einer Kurvenschar c vor und konstruiert die Kongruenz der Extremalen, die die Kurven der Schar berühren. Für eine Extremalröhre erhält man die absolute Integralinvariante dann folgendermaßen: Das Variationsproblem des Dingraumes „induziert“ auf der Fläche ein Variationsproblem mit der Hamiltonschen Funktion $K(v, u, s)$ (u = Koordinate, v = Impuls, s = unabhängige Veränderliche). Aus $\frac{du}{ds} = K_v$, wobei $\frac{dv}{ds}$ durch die Kurvenschar als Funktion des Ortes bestimmt ist, ergibt sich dann v als Funktion des Ortes auf der Fläche und die absolute Integralinvariante ist $\iint \Omega ds du$, mit $\Omega = \frac{dv}{ds} + K_u$. Gibt man nun auch im „Bildraum“ eine Fläche vor und bezieht sie wieder punktweise auf die Fläche des Dingraums, so induziert das Variationsproblem des Bildraums auf dieser Fläche ein Variationsproblem $\bar{K}(\bar{v}, u, s)$ und das allgemeine Brechungsgesetz lautet: $\Omega = \Omega^*$ mit $\Omega^* = \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{K}_u$. Um die Bildkongruenz zu erhalten, hat man daher auf der Fläche des Bildraums eine Schar von Kurven c^* zu bestimmen, die dieser Bedingung genügt — sie sind Extremalen eines sofort anzugebenden Variationsproblems —, und die Extremalen des Bildraums anzugeben, die die Kurven dieser Schar berühren. Zum Schluß gibt Verf. die expliziten Formeln für diejenigen Kurvenscharen auf der Fläche des Dingraums, deren Bilder c' auf der Fläche des Bildraums als die Kurven c^* genommen werden können. Prange.

Funktionentheorie:

Popken, J.: Eine arithmetische Eigenschaft gewisser ganzer Funktionen. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 263—270 (1937).

Beweis der Hilfssätze A und B der gleichnamigen ersten Mitteilung (I. vgl. dies. Zbl. 16, 65). Mahler (Krefeld).

Walsh, J. L.: A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 923—930 (1936).

Let $f(z)$ be regular at $z = z_0$. Writing

$$\Delta_n(z_0, h) = n^{-1} \sum_{v=0}^{n-1} f\left(z_0 + h e^{2\pi i \frac{v}{n}}\right) - f(z_0),$$

we have $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \Delta_n(z_0, h) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. If $f(z)$ is analytic for all values of z , we have the identity $\Delta_n(z_0, h) = 0$ if, and only if, $f(z)$ is a polynomial of degree $n - 1$. An analogous characterization of the harmonic polynomials is also possible. G. Szegő.

Fabian, W.: Expansions by the fractional calculus. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 252—255 (1936).

By combining the definitions of Bernoulli and Riemann for fractional derivatives the author obtains the following development:

$$f(z_0) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f_{\lambda-n}(z_0)}{n!(n-\lambda)} (z_0 - a)^{n-\lambda}.$$

Here $f(z)$ is analytic within a circle of centre z_0 which contains the simple curve l in its interior, and a is on l . We have $\Re(\lambda) < 0$, and in case $\Re(\lambda) \leq -1$, we assume $f^{(\nu)}(a) = 0$, $0 \leq \nu \leq \gamma - 2$; γ is the least non-negative integer with $\Re(\lambda) + \gamma > 0$. Generally,

$$f_{\lambda}(z) = \frac{D^{\gamma}}{\Gamma(\lambda + \gamma)} \int_a^z (z - t)^{\lambda + \gamma - 1} f(t) dt,$$

and both integration and differentiation have to be taken along l . For the validity of the former expansion we assume that the Taylor series of $f_{\lambda}(z)$ around z_0 converges uniformly on l . G. Szegő (St. Louis, Mo.).

● **Ford, Walter B.:** The asymptotic developments of functions defined by MacLaurin series. (Univ. of Michigan studies, sci. ser. Vol. 11.) Ann Arbor: Univ. of Michigan press 1936. VI, 143 pag. a. 10 fig. \$ 2.—.

This monograph is concerned with the problem of determination of the analytic and asymptotic behavior of an analytic function whose element is given by the series

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n$ where $g(w)$ in its turn is an analytic function satisfying certain restrictions. Assuming that $g(x + iy)$ is analytic and single-valued for $x > x_0$ the author proves that $f(z)$ is analytic in the sector $\gamma < \arg z < 2\pi - \gamma$ and admits there of an asymptotic expansion $-\sum_{n=1}^{\infty} g(-n) z^{-n}$, provided that (*) $|g(x + iy)| = O(\exp(\gamma + \varepsilon)|y|)$, $0 \leq \gamma < \pi$. (Ch. I; cf. also Lindelöf, Calcul des résidus, pp. 109—113.) In Ch. 4 it is assumed that $f(z)$ is an entire function and that g satisfies (*) with $\gamma = \pi$, with the result $f(z) = \int_{-l-i}^{\infty} g(x) z^x dx - \sum_{n=1}^l g(-n) z^{-l} + o(z^{-l})$, where l is any integer ≥ 1 .

In Ch. 2 the author makes more precise a theorem due to Barnes [Philos. Trans. Roy. Soc. London A 206, 254—256 (1906)]. In Ch. 3, 6, 7 the author applies his general theorems to series of the type

$$\sum z^n (n + \theta)^{-\beta}, \quad \sum z^n h(n) [\Gamma(n + p)]^{-1}, \quad \sum z^n h(n) [\Gamma(n + k_1) \Gamma(n + k_2)]^{-1}$$

respectively, where $h(n)$ satisfies certain additional restrictions. Ch. 5 contains some auxiliary propositions, while the last Ch. 8 is devoted to a detailed discussion of the asymptotic behavior of solutions of the differential equations

$$z^2 p_0(z) \frac{d^2 y}{dz^2} + z p_1(z) \frac{dy}{dz} + p_2(z) y = 0$$

where $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$ are polynomials of second degree in z . The book contains numerous examples illustrating the general theory. J. D. Tamarkin (Providence).

Lipka, Stephan: Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen. Mat. természett. Értes. 55, 272—277 u. deutsch. Zusammenfassung 278—279 (1937) [Ungarisch].

Der einfachste der hier bewiesenen Sätze lautet: Besitzt die Potenzreihe $\sum_0^{\infty} a_n z^n = f(z)$ den Konvergenzkreis $|z| < 1$ und liegen die Koeffizienten a_n in einem Kreise, der durch den Nullpunkt geht, dann ist $z = 1$ ein singulärer Punkt der Funktion $f(z)$. Allgemeinere Sätze werden für Dirichletsche Reihen unter Benutzung gewisser Resultate des Ref. bewiesen. Vgl. auch das Referat dies. Zbl. 16, 64 (C. Biggeri). Otto Szász.

Birindelli, Carlo: Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 6, 179—189 (1937).

L'A. indique un domaine où une série $\sum d_n z^n$ (avec le rayon de cov. $\neq 0$) est sommable uniformément par le procédé de Gronwall généralisant celui de de la Vallée-Poussin.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Mazurkiewicz, Stefan: Ultraconvergence et espace fonctionnel. Fundam. Math. 28, 289—293 (1936).

Des résultats intéressants contenus dans ce travail, nous mentionnerons celui-ci: G étant un domaine simplement connexe, il existe une fonction analytique possédant G comme domaine d'existence et dont tous les développements en séries de Taylor sont ultraconvergentes dans G .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Stoïlow, S.: Remarques sur les fonctions analytiques continues dans un domaine où elles admettent un ensemble parfait discontinu de singularités. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, 117—120 (1936).

L'A. indique que certains de ses résultats, concernant les transformations intérieures, conduisent à une démonstration rapide du théorème de Pompeiu-Denjoy (sous la forme générale donnée par Denjoy) concernant l'identité de deux fonctions analytiques, partout continues, coïncidant sur une portion d'un ensemble parfait discontinu P — leur ensemble singulier commun. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Geronimus, J.: Sur le problème des coefficients pour les fonctions bornées. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 97—98 (1937).

Let $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ be given complex values and $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ an arbitrary function regular in $|z| < 1$ and satisfying the condition $|f(z)| \leq 1$. The author determines the maximum of $|\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n|$ for the class of the functions $f(z)$. The maximum is attained for a certain rational function which can be calculated by means of a theorem of F. Riesz [Acta math. 42, 145 (1920)]. — The reviewer remarks that the same problem has been treated with the same result by O. Szász in Mat. természett. Értes. 43 (1926). *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Cacridis-Theodorakopulos, Penelope: Über die Krümmung der Niveaukurven der beschränkten Funktionen. Math. Ann. 114, 275—283 (1937).

Sei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche den Bedingungen $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$, $|f'(0)| \geq \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) genügt. Es wird folgendes bewiesen: Ist $\varrho \leq$ die kleinste positive Wurzel ϱ_0 der Gleichung $\varrho^3 - \varrho^2 \frac{4+\alpha}{\alpha} + \varrho \frac{4+\alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} = 0$, so ist

die Krümmung K der Bildkurve des Kreises $|z| = \varrho$ größer oder gleich $\frac{1}{\varrho}$. Hier gilt das Gleichheitszeichen im Falle $\varrho < \varrho_0$ nur für die Funktion (1) $f(z) = e^{i\vartheta} z$, (ϑ reell), und im Falle $\varrho = \varrho_0$ für die Funktion (1) und für (2) $f(z) = e^{i\vartheta} z \frac{\alpha - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z}$ im Punkte $z = \varrho e^{-i\varphi}$, (ϑ, φ reell). Auch für $\varrho_0 < \varrho <$ die sog. Schranke der Schlichtheit wird eine nur von ϱ und α abhängige genaue untere Grenze von K abgeleitet, welche nur von der Funktion (2) erreicht wird. *V. Paatero* (Helsinki).

Cell, John W.: Functions arising from differential equations and serving to generalize a theorem of Landau and Carathéodory. Duke math. J. 2, 638—649 (1936).

The author extends Picard-Landau's theorem by determining the exact radius of the circle $|x| < R$ in which a function $a_0 + a_1 x + \dots$ with given a_0, a_1 , ($a_1 \neq 0$), regular around $x = 0$ is either singular or it assumes one of m preassigned values α_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Here α_i are certain special sets, for instance the m -th roots of unity or these roots and 0, and so on. The exact radius $R = R(a_0, a_1, \alpha_i)$ involves certain ratios of hypergeometric functions of special character which possess properties similar to those of the function used in the classical considerations of Picard-Landau-Carathéodory. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Chuang, Chi-Tai: Un théorème relatif aux directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 951—952 (1937).

Dans l'ordre d'idées de sa Note précédente (voir ce Zbl. **15**, 359), l'Aut. énonce ce théorème qui se démontre par les méthodes de R. Nevanlinna: Si Δ est une direction de Borel d'ordre ρ d'une fonction méromorphe d'ordre fini ρ , $f(z)$, qui admet deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel dans un angle contenant Δ à son intérieur, Δ est aussi direction de Borel d'ordre ρ de $f'(z)$. Si l'une des valeurs exceptionnelles est infinie, Δ est direction de Borel de toutes les dérivées de $f(z)$. (Comparer aux résultats de Rauch, ce Zbl. **10**, 171.) Valiron (Paris).

Robertson, M. S.: On the order of the coefficients of a univalent function. Amer. J. Math. **59**, 205—210 (1937).

If the coefficients of $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, regular and univalent in $|z| < 1$, satisfy the condition $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{\log n} = 1$, a sequence of points z_i exists, $|z_i| < 1$, tending to a singular point of $f(z)$ on $|z| = 1$ and satisfying a certain limiting relation. This relation indicates a close connection between this function $f(z)$ and Koebe's function $z(1-z)^{-2}$. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Visser, Cornelis: On a certain class of conformal mappings. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40**, 223—226 (1937).

D sei ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Teilgebiet der rechten Halbebene $x > 0$ ($x = x + iy$), das den Punkt $z = \infty$ als Randpunkt hat und von einer einfachen Kurve Γ begrenzt wird. Wenn $w(z)$ das Gebiet D auf die rechte Halbebene so abbildet, daß $x = \infty$ dem Punkt $w = \infty$ entspricht, so existiert nach einem Satz von Wolff und Carathéodory eine reelle Konstante l ($0 < l \leq \infty$), so daß $\frac{w}{z}$ und $w'(z) \rightarrow l$ gilt, wenn $w \rightarrow \infty$ strebt auf einem Halbstrahl $\arg w = \alpha$ ($|\alpha| < \frac{\pi}{2}$). — Mit Hilfe einfacher Eigenschaften des harmonischen Maßes wird gezeigt, daß ein Teilbogen γ von Γ , der im Kreise $|z - ia| \leq R$ (a reell) liegt, als Bildbogen eine Strecke der imaginären Achse hat, deren Länge höchstens $4lR$ ist. Die Schranke ist genau. — Da das Ergebnis nur im Falle $l \neq \infty$ nichttrivial ist, ist es nur in solchen Fällen von Bedeutung, in denen die Endlichkeit von l durch zusätzliche Bedingungen über das Gebiet D sichergestellt ist. Die vom Verf. gemachte einschränkende Annahme, daß D einen Winkel der Größe $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) enthält, bedingt noch nicht $l < \infty$ und scheint überflüssig zu sein. Rolf Nevanlinna (Göttingen).

Kneser, Hellmuth: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1936**, 446—462.

Um den Zusammenhang zwischen Ordnung und Nullstellen ganzer Funktionen $f(w, z)$ aufzufinden, führt Verf. 2 Dichtemaße für die Nullstellen ein (die ja nicht wie in der klassischen Theorie zählbar sind). Die Strahlendichte ϱ_1 wird — immer $f(0, 0) \neq 0$ vorausgesetzt — definiert durch das Maximum des Grenzexponenten von $\varphi(t) = f(at, bt)$, wenn a und b alle möglichen Wertepaare durchlaufen. Die Flächendichte einer Nullstellenfläche \mathfrak{N} von $f(w, z)$ wird als untere Grenze ϱ_2 der Werte $\mu \geq 0$ definiert, für die

$$\iint_{\mathfrak{N}} H^{-\frac{\mu}{2}-1} d\sigma,$$

gemessen nach einer beliebigen Hermiteschen Form H , konvergiert. Die Ordnung ϱ von $f(w, z)$ wird in naheliegender Verallgemeinerung zur klassischen Theorie gebildet. Dann gilt: 1. $\varrho_1 \leq \varrho$, $\varrho_2 \leq \varrho$. 2. Zu einer Nullstellenfläche endlicher Dichten gibt es eine kanonische ganze Funktion, deren Ordnung die größere der beiden Dichten nicht übertrifft. 3. Eine beliebige ganze Funktion f endlicher Ordnung unterscheidet sich von der kanonischen mit der gleichen Nullstellenfläche nur durch $e^{P(w, z)}$, $P(w, z)$ ein Polynom von nicht höherem Grade als die Ordnung von f . — Schließlich ist noch

die Darstellung von $\log f(w, z)$ einer kanonischen ganzen Funktion durch ein Integral über die Nullstellenmannigfaltigkeiten interessant. Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Chapelon, Jacques: Sur un théorème fondamental du calcul des probabilités. J. École polytechn., III. s. 143, 161—172 (1937).

Abänderung des P. Lévy'schen Beweises dafür, daß die Verteilungsfunktionen $F_n(x)$ gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ konvergieren, wenn die charakteristischen Funktionen von $F_n(x)$ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen die charakteristische Funktion von $F(x)$ konvergieren. Ausgangspunkt ist auch hier die Lévy'sche Inversionsformel, aus der sich jedoch der Satz durch einen indirekten Schluß ganz einfach ergibt; vgl. etwa Lévy: Addition des variables aléatoires. Paris 1937. S. 49f. Der Satz gilt auch unter allgemeineren Bedingungen (vgl. ebenda und Glivenko, dies. Zbl. 14, 27). W. Feller (Stockholm).

Lévy, Paul: L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis de lois de Poisson. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 944—946 (1937).

Die charakteristische Funktion eines Produktes (d. h. einer Komposition) von N Poissonschen Verteilungsgesetzen hat die Form

$$\varphi(z) = \exp. \sum_{k=1}^N a_k (e^{i\sigma_k z} - 1) \quad (a_k > 0, \sigma_k \geq 0); \quad (1)$$

es wird der Fall betrachtet, in dem sämtliche σ_k ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Zahl σ sind. Setzt man $x = \exp. i\sigma z$, so hat $\log \varphi(z)$ die Gestalt $P(x) - P(1)$, wo $P(x)$ ein Polynom mit positiven Koeffizienten bedeutet. Die für die Arithmetik der Verteilungsgesetze wichtige Frage danach, ob und wann das durch (1) repräsentierte Verteilungsgesetz einen unzerlegbaren Faktor enthält, wird nun für den betrachteten Fall vollständig beantwortet; die notwendige und hinreichende Bedingung betrifft ausschließlich die in $P(x)$ auftretenden Exponenten. Dieser Satz erlaubt die Konstruktion mehrerer lehrreicher Beispiele; insbesondere wird gezeigt: 1. ein Verteilungsgesetz, dessen charakteristische Funktion eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist, braucht nicht unbeschränkt teilbar zu sein; ist es unbeschränkt teilbar, so kann es unzerlegbare Faktoren enthalten; 2. für beliebige ganze $N \geq 3$, $n \geq 2$ gibt es ein Verteilungsgesetz, welches zugleich Produkt von N Poissonschen und Produkt von n unzerlegbaren Gesetzen ist; 3. es gibt Verteilungsgesetze, die sich auf mehrere verschiedene Arten als Produkte eines Poissonschen und eines unzerlegbaren Gesetzes darstellen lassen.

A. Khintchine (Saratow).

Bawly, G. M.: Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 917—929 (1936).

$\{x_{nk}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ seien unabhängige stochastische Veränderliche

mit 1. verschwindenden Mittelwerten, 2. endlichen Streuungen b_{nk} , für welche $\sum_{k=1}^n b_{nk}$ gleichmäßig beschränkt ist und (3.) $\max [b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}] \rightarrow 0$ strebt. Es seien $F_{nk}(x)$ bzw. $F_n(x)$ die Verteilungsfunktionen von x_{nk} bzw. von $x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk}$, $\varphi_{nk}(t)$ bzw. $\varphi_n(t)$ die entsprechenden charakteristischen Funktionen. Schließlich werde

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^x y^2 dF_{nk}(y)$$

gesetzt. Dann gilt: Satz 1. $F_n(x)$ strebt dann und nur dann gegen eine Grenzverteilungsfunktion $H(x)$, wenn mit passenden Konstanten a_n auch $G_n(x + a_n)$ gegen eine Verteilungsfunktion $G(x)$ strebt. Für die charakteristische Funktion $\chi(t)$ von $H(x)$ gilt dann

$$\log \chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} dG(x). \quad (*)$$

Ersetzt man in (*) G und χ durch G_n bzw. χ_n , so ist χ_n die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion $H_n(x)$ und es gilt: Satz 2. $F_n(x) - H_n(x)$ strebt [allein unter den Bedingungen (1)–(3)] nach Maß gegen Null. — Ausgangspunkt des Beweises ist,

daß $\log \varphi_n(t)$ asymptotisch gleich ist $\sum_{k=1}^n \{\varphi_{nk}(t) - 1\} \equiv \log \chi_n(t)$. Feller (Stockholm).

Misès, R. de: La distribution de la plus grande de n valeurs. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 141–160 (1936).

Die x_k seien stochastische Veränderliche mit derselben Verteilungsfunktion $F(x)$; dann ist $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ eine stochastische Veränderliche mit der Verteilungsfunktion $F^n(x)$. In Anschluß an R. A. Fisher und Trippett [Proc. Cambridge Philos. Soc. 24 (1928)] und Gumbel (vgl. dies. Zbl. 11, 361) wird das asymptotische Verhalten von $F^n(x)$ in der Nähe der Lösung x_n von $1 - F(x_n) = 1/n$ untersucht. Verf. zeigt an einem Beispiel, daß im allgemeinen mit keiner Konstantenfolge $\{c_n\}$ ein Grenzwert von $W_n(u) = F^n(x_n + u/c_n)$ existiert. Er findet jedoch drei verschiedene Typen von $F(x)$, für welche $W_n(u)$ mit geeigneten c_n gegen Grenzfunktionen strebt der Form $e^{-(1+u)^{-k}}$ bzw. $e^{-e^{-u}}$ bzw. $= 0$ für $u < 0$, $= \frac{1}{e}$ für $u \geq 0$. Die beiden ersten Grenzfunktionen waren bereits bekannt. Es wird auch das Verhalten der Momente untersucht.

W. Feller (Stockholm).

Fréchet, M.: Sulla mescolanza delle palline e sulle leggi-limite delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 14–28 (1937).

Le problème suivant a été étudié par O. Onicescu et G. Mihoc (ce Zbl. 13, 273): Une urne contient B boules blanches et N noires; on tire une boule; si c'est une blanche on dépose dans l'urne au lieu d'elle une noire, si c'est une noire, on dépose une blanche. L'auteur montre comment les questions que l'on peut poser sur ces tirages se ramènent à des problèmes relatifs à une chaîne simple de Markoff. Etant donné le nombre de boules blanches contenues dans l'urne avant le tirage il y a une probabilité déterminée pour que l'on tire une blanche. Soit n le nombre de tirages et ν le nombre de boules blanches extraites; $x = \nu - \frac{n}{2}$ sera l'écart dont le double $2x$ ne peut recevoir que les valeurs $0, 1, 2, \dots, T$ où $T = B + N$ est le nombre total de boules. La probabilité $P_{jk}^{(n)}$ pour que l'on passe par n tirages successifs du nombre j de boules blanches contenues dans l'urne au nombre k n'admet pas de limite lorsque n augmente indéfiniment. La valeur moyenne du nombre de boules blanches contenues dans l'urne après n tirages successifs tend vers une limite déterminée qui ne dépend pas de B et qui est égale à $\frac{1}{2}T$.

B. Hostinský (Brno).

Mihoc, G.: Sur les lois-limites des variables liées en chaîne. Bul. fac. ști. Cernăuți 10, 1–26 (1936).

Verf. untersucht anschließend an die bekannten Resultate [vgl. etwa V. Romanovsky, Recherches sur les chaînes de Markoff. Acta math. 66 (1936); dies. Zbl. 14, 28] insbesondere die ausgearteten Fälle, in welchen der Gaußsche Grenzwertsatz nicht gilt.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Ranulac, Britt: Sur la dérivabilité de certaines fonctions représentées par une intégrale. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 946–948 (1937).

Die Note bringt eine Fortsetzung der kürzlich erschienenen Arbeit von Dugué (dies. Zbl. 15, 406); es wird das Verhalten einer charakteristischen Funktion bei $t = 0$ in seiner Abhängigkeit von der zugehörigen als totalstetig vorausgesetzten Verteilungsfunktion näher untersucht; insbesondere wird die vom Ref. a. a. O. geäußerte Bemerkung durch direkte Rechnung bewiesen.

A. Khintchine (Saratow).

Cantelli, Francesco Paolo: Sulla estensione del principio delle probabilità totali ad una successione illimitata di eventi incompatibili. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 439–447 (1936).

Savur, S. R.: A new solution of a problem in inverse probability. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 222—234 (1937).

Ein „Ereignis“ möge unter b Versuchen a -mal eingetreten sein; was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es unter weiteren d Versuchen c -mal vorkommt? Unter gewissen Voraussetzungen haben bekanntlich Pearson (Bayessche Formel) und R. A. Fischer (maximum likelihood) Lösungen der Frage angegeben, die vom Verf. kritisiert und durch folgende „statistische“ Methode ersetzt werden. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten P bzw. Q dafür, daß ein Ereignis der a priori Wahrscheinlichkeit p unter b Versuchen höchstens bzw. mindestens a -mal eintritt. Bei gegebenen P und Q haben die Gleichungen je genau eine reelle Lösung zwischen 0 und 1. Rechnet man mit einer Genauigkeit von 5%, so setze man $P = Q = 0,05$: es wird angenommen, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit kleiner sein muß als die Lösung der ersten und größer als diejenige der zweiten Gleichung. Viele Anwendungsbeispiele.

W. Feller (Stockholm).

Sibirani, F.: Sopra due probabilità geometriche. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 39—42 (1937).

Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür ausgerechnet, daß die Gleichungen $x^k + ux + v = 0$, $k = 1, 2$ reelle Wurzeln haben, unter der Voraussetzung, daß $|u| < u_0$, $|v| < v_0$ ist, und in diesem Quadrat alle Punkte gleichwahrscheinlich sind.

W. Feller (Stockholm).

Olds, E. G.: A note on the problem of estimation. Amer. Math. Monthly 44, 92—94 (1937).

The author uses a note by E. S. Keeping, Amer. Math. Monthly 42, 161—163 (1935); this Zbl. 11, 126 as basis for sounding a warning against the unexplained use of “best estimate”, noting in particular that Keeping omits the restriction included by Neyman that the form of the estimating function must be so chosen that it will have for its mean value the parameter to be estimated. A. A. Bennett (Providence).

Fry, Thornton C.: Consistency of independent countings as a criterion for completeness. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 211—217 (1936).

Suppose that m proof-readers as a group discover N errors but that individually they have missed a_1, a_2, \dots, a_m of the N known errors respectively; what is the probability that n errors remain undiscovered? It is assumed that for the j -th reader, the chance of discovering any one error is p_j , and a solution is obtained in the following form: Let $P(A)$ denote the probability that as a group the m readers will find N and miss n errors (the event A) and let $P_A(B)$ denote the probability that if the event A occurs, a less likely set of values of a_1, a_2, \dots, a_m than those actually obtained would occur. Then the set of values $[p_j]$ is found which maximizes $P(A)$ subject to the condition that $P_A(B)$ shall not be less than a preassigned value. Then it can be stated that independently of the set $[p_j]$ the probability of n errors being missed does not exceed a known value \bar{M} unless $P_A(B)$ falls below a given value \underline{M} . A numerical example is given for the interesting case in which $n = 1$, in which \bar{M} being taken small, a small value is obtained for \bar{M} also.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Geometrie.

● Graf, Ulrich: Darstellende Geometrie. (Hochschulwiss. in Einzeldarstell.) Leipzig: Quelle & Meyer 1937. 174 S. u. 281 Abb. geb. RM. 4.—.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die in den Anwendungen der darstellenden Geometrie vorkommenden Konstruktionsverfahren in knappester Darstellung zusammenzufassen. Um den Leser zu gegenständlichem Denken anzuregen und ihn mit den Anwendungsobjekten bekannt zu machen, werden diese meistens durch ein Schrägbild gegeben, worauf aus diesem der Konstruktionsvorgang anschaulich herausgelesen wird. — Behandelt werden Parallel- und Zentralprojektion, Kreis, Kegelschnitte,

Schraublinie, Kugel, Drehflächen, Durchdringungen. Die Anwendungen sind zahlreich vertreten mit Geländekonstruktionen, bau- und maschinentechnischen Einzelheiten und Aufgaben aus der Photogrammetrie. — Das kleine Buch wird Studierenden der technischen Hochschulen als Hilfsbuch bei gleichzeitigem Besuch ausführlicher Vorlesungen gute Dienste leisten.

E. Kruppa (Wien).

Krames, Josef L.: *Sur une classe remarquable de mouvements de l'espace. Vibration symétrique.* C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1102—1104 (1937).

Vorläufige Mitteilung einiger Ergebnisse der Untersuchungen des Verf. über „symmetrische Schrotungen“. Unter einer symmetrischen Schrotung wird dabei eine Bewegung verstanden, bei der die Lagen des bewegten Systems dadurch erhalten werden, daß das feste Raumsystem an den Erzeugenden einer Regelfläche gespiegelt wird.

E. Kruppa (Wien).

Pantazi, M. A.: *Sur certaines configurations d'homographies planes.* Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **7**, 15—19 (1937).

Die Fragestellung der Note ist die folgende: Es sind drei verschiedene Homographien H_i auf einer Geraden g derart zu finden, daß das durch einen beliebigen Punkt A_0 und die in den Homographien einander entsprechenden Punkte A_i ($i=1,2,3$) gebildete Doppelverhältnis $(A_0 A_1 A_2 A_3)$ konstant ($=\varrho$) und von der Lage von A_0 auf g unabhängig ist. — Verf. zeigt zuerst, daß die Fragestellung sinnvoll ist, und gliedert sie dann in vier Teilfälle auf, die einzeln durchdiskutiert werden. Der letzte Fall, in dem die H_i verschiedene Doppelemente besitzen, ist dabei der interessanteste. Mit den Methoden der rechnerischen projektiven Geometrie wird dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung hergeleitet, die die gesuchten Homographien eindeutig kennzeichnet.

Steck (München).

Hostetter, I. M.: *An extension of Gibbs' vector analysis to N-space.* J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15**, 191—204 (1936).

In this paper the methods of Gibbs are extended from 3-space to n -space the various outer products appearing as polyadic products; e.g., the n -dimensional scalar product of n vectors is written as $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots A_n$. Reciprocal sets of vectors are discussed and also the scalar invariants of a dyad. The paper closes with a discussion of the various space derivatives of vectors and dyads.

Murnaghan.

Bouligand, Georges: *Sur une propriété du rotationnel.* Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **7**, 19—22 (1937).

Als Übungsaufgabe für Kurse über Tensorrechnung wird auf die Kovarianz der Rotation eines Vektorfeldes bei differenzierbaren Transformationen hingewiesen.

W. Feller (Stockholm).

Bouligand, Georges: *Transformations ponctuelles du plan et enveloppes à deux paramètres.* Bull. Sci. math., II. s. **61**, 47—54 (1937).

Es wird in verschiedenen Fällen das Verhalten von mehrparametrischen Einhüllenden in Punkten mit verschwindender Funktionaldeterminante untersucht.

W. Feller.

Analytische und algebraische Geometrie:

Gambier, Bertrand, et Charles H. Rowe: *Lieu des points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants: Biquadratiques, cubiques gauches et dégénérescences.* Ann. École norm., III. s. **53**, 329—386 (1936).

Zu drei gegebenen Geraden des Euklidischen Raumes gibt es vier kubische Raumkurven, derart, daß die Punkte einer jeden Kurve von den drei Geraden konstante Abstandsverhältnisse besitzen. Die drei Geraden werden als „Leitgeraden“ (directrices) dieser Raumkurven bezeichnet (H. Rowe). Die interessante umfangreiche Arbeit behandelt die Fragen: Welche Raumkurven vierter Ordnung haben drei oder vier derartige Leitgeraden? Wieviele Systeme von Leitgeraden treten bei speziellen oder zerfallenen Raumkurven vierter Ordnung auf? — Sind D_1, D_2, D_3 die Ausdrücke für die Abstände eines Punktes von drei festen Geraden und m_1, m_2, m_3 Konstanten

(bis auf einen Proportionalitätsfaktor), so gehen die drei Flächen zweiter Ordnung mit den Gleichungen:

$$m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0, \quad m_3^2 D_3^2 - m_1^2 D_1^2 = 0, \quad m_1^2 D_1^2 - m_2^2 D_2^2 = 0$$

durch eine spezielle Raumkurve vierter Ordnung. Diese besitzt drei und i. a. nur drei Leitgeraden. Schneidet die Raumkurve vierter Ordnung die unendlichferne Ebene in den vier Eckpunkten eines dem Kugelkreise umschriebenen einfachen Vierseits, so ist sie Basiskurve eines Büschels von (orthogonalen) Flächen zweiter Ordnung mit einer gemeinsamen Achsenrichtung. Jede der Flächen sendet nämlich eine ihrer Hauptachsen durch den Diagonalschnittpunkt des unendlichfernen Vierseits. Diese Raumkurve vierter Ordnung besitzt ∞^1 -Systeme von drei Leitgeraden. Sie ist Schnittkurve zweier Rotationsparaboloide. Fallen jene ∞^1 parallele Hauptachsen zusammen, so hat die Raumkurve ∞^2 Systeme von vier Leitgeraden. Sie ist Schnitt zweier Rotationszylinder, hat das gemeinsame Lot der Zylinderachsen zur Symmetrieachse und ihre Leitgeraden stehen auf dieser Achse senkrecht. Die sorgfältige Untersuchung dieses Theorems sowie seiner Sonderfälle ergibt eine Menge Nebenresultate. Der Zerfall der biquadratischen Raumkurve in eine kubische Raumkurve und eine Gerade (Bisekante) führt auf entsprechende Sätze für die kubische Raumkurve, durch die ∞^1 orthogonale Flächen zweiter Ordnung gehen. Die kubische Raumkurve besitzt i. a. endlich viele Systeme von drei Leitgeraden, und zwar mindestens sieben. Hier liegt der einzige Punkt des Problems vor, der sich nicht vollständig klären ließ. Wieder werden die Sonderfälle behandelt: Bestimmt die kubische Raumkurve in der unendlichfernen Ebene ein dem Kugelkreis umschriebenes Dreieck, so gibt es ∞^1 Systeme von drei Leitgeraden. Die kubische Horopterkurve besitzt sogar ∞^2 Systeme von vier Leitgeraden. Die an geometrisch interessanten Sätzen reiche Abhandlung schließt mit der Besprechung der ausgearteten Zerfallserscheinungen. *Haenzel* (Karlsruhe).

Biggiogero, Giuseppina: Una proprietà caratteristica dei fasci di curve di Klein-Lie. *Scritti mat. off. a Luigi Berzolari* 421—430 (1936).

Ist es möglich, eine ebene algebraische Kurve M zu finden, so daß die Kurven eines Büschels Φ auf den einzelnen Tangenten von M projektive Punktreihen ausschneiden? M. D'Ocagne hat diese Aufgabe in metrischer Form gestellt und einige Lösungen angegeben [*Enseignement Math.* 33, 63—72 (1934)]; er spricht auch von dem Falle, wo M eine beliebige Kurve von Φ sein kann. Hier wird die Aufgabe vollständig gelöst. Zunächst einige Beispiele, wo die gewünschte Eigenschaft offenbar erfüllt ist: a) Φ ist ein Strahlbüschel und M eine beliebige Kurve; b) die Enveloppe von M ist ein Strahlbüschel O , und Φ besteht aus Kurven einer beliebigen Ordnung r mit O als $(r-1)$ -fachem Punkt; c) die Enveloppe von M ist ein Strahlbüschel O , und Φ hat die Form $[y\varphi_{r-1}(x) + \varphi_r(x)]^s - t \cdot (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_r) = 0$, wo φ_{r-1}, φ_r Polynome der Grade $r-1, r$ sind. So sind alle Fälle erschöpft, wo entweder Φ aus Geraden besteht oder die Enveloppe von M ein Strahlbüschel ist. Eine andere Lösung wird von einem Büschel Φ von algebraischen W -Kurven von Klein und Lie geliefert; die Existenz einer eingliedrigen Gruppe, deren Trajektorien die Kurven φ des gegebenen Büschels Φ sind, führt zur Eigenschaft, daß die Kurven φ auf den Tangenten einer beliebigen Kurve φ desselben Büschels, als Kurve M angenommen, projektive Punktreihen ausschneiden. Abgesehen von den obigen elementaren Lösungen liefert dieses letzte Beispiel die allgemeinste Lösung. Der Beweis wird auf folgenden Satz gestützt: Wenn zwei irreduzible algebraische Funktionen $x = x(\lambda)$, $x' = x'(\lambda)$ gegeben sind, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Korrespondenz zwischen den Wertepaaren x, x' , die demselben λ entsprechen, sich aus projektiven Korrespondenzen zusammensetzt, in der Identität der Monodromiegruppen der zwei Funktionen. Die Anwendung dieses Satzes auf die entsprechenden Punktgruppen, die von den Kurven φ auf zwei Tangenten von M ausgeschnitten werden, führt eben zu einigen Eigenschaften des Büschels Φ , die es als Büschel von W -Kurven charakterisieren. Und so erscheint

die Eigenschaft, die M. D'Ocagne als besonders bezeichnet hatte, als eine der Haupt eigenschaften der allgemeinsten Lösung. *E. G. Togliatti (Genova).*

Burniat, Pol: Sur les surfaces de genres un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 1273—1283 (1936).

Einige Beispiele von Flächen, die die Geschlechter 1 haben und die eine Involution 2. Ordnung mit 8 Fixpunkten enthalten. Es sei T die birationale Transformation der Fläche in sich selbst, die die betrachtete Involution erzeugt. Die Fläche enthält immer vollständige und einfache Linearsysteme $|C|$, einer Dimension $\pi \geq 3$, die von T in sich selbst verwandelt werden; ein solches System liefert die Abbildung der Fläche auf eine $F^{2\pi-2}$ eines Raumes S_π , deren Schnittkurven das Geschlecht π haben. T verwandelt sich in eine involutorische Homographie, und die 8 Fixpunkte der betrachteten Involution verteilen sich auf die beiden Achsen der Homographie. Die Fälle $\pi = 3$ bis $\pi = 7$, und insbesondere $\pi = 6$, werden untersucht. *E. G. Togliatti (Genova).*

Clarkson, J. M.: An involutorial line transformation determined by a congruence of twisted cubic curves. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 142—144 (1937).

Black, Amos, and H. A. Davis: Some non-involutorial space transformations associated with pencils of nodal cubic surfaces. Tôhoku Math. J. 42, 366—371 (1936).

The purpose of this paper is to discuss non-involutorial space transformations defined as follows. Given a rational space curve r_m of order m with points $O(z)$, and two pencils of cubic surfaces $|F_3|$ and $|F'_3|$. Make the surfaces of each pencil projective with the points of r_m , also impose the condition that each surface of $|F_3|$ and of $|F'_3|$ have of double point at its associated point $O(z)$ on r_m . Then a point $P(y)$ of space determines a surface F_3 of $|F_3|$, a point O on r_m , and a surface F'_3 of $|F'_3|$. The line PO intersects F'_3 in one point P' , residual to O , which is the image of P in the transformation T . *Autoreferat.*

Narasinga Rao, A.: On certain Cremona transformations in circle-space connected with the Miquel-Clifford configuration. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 21—25 (1937).

Es seien O, A die beiden Schnittpunkte zweier Kreise γ, γ' ; jedem dritten durch O hindurchgehenden Kreise x läßt man den Kreis x' entsprechen, der durch A und die zwei übrigen Schnittpunkte $x\gamma, x\gamma'$ bestimmt wird; man erhält so eine quadratische Transformation zwischen den beiden durch O und A hindurchgehenden Kreisnetzen. Es seien dann vier durch O hindurchgehende Kreise 1, 2, 3, 4 gegeben; die drei übrigen Schnittpunkte von drei beliebigen dieser Kreise bestimmen vier Kreise („Cliffordsche Kreise“), die durch einen Punkt 1234 hindurchgehen („Miquelscher Punkt“); wenn x ein fünfter durch O hindurchgehender Kreis ist, bekommen wir vier weitere ähnliche Punkte $123x, 234x, 341x, 412x$, die zusammen mit 1234 auf einem Kreise x' liegen; jeder Kreis x durch O wird so einem Kreis x' durch 1234 zugewiesen; man erhält so eine kubische Transformation zwischen zwei Kreisnetzen. Ganz ähnlich verfährt man, wenn eine beliebige gerade Anzahl $2m$ von durch einen Punkt O hindurchgehenden Kreisen gegeben ist; man erhält dann eine De Jonquièressche Transformation der Ordnung $m + 1$ zwischen zwei Kreisnetzen. Verf. gibt dafür zwei verschiedene Beweise. Wenn die Kreise der Ebene linear auf die Punkte des Raumes abgebildet werden, erhält man eine gewisse De Jonquièressche Transformation zwischen zwei Berührungsebenen einer Quadrik. *E. G. Togliatti (Genova).*

Godeaux, Lucien: Sur une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes bicanoniques. Rev. Ci., Lima 38, Nr 418, 103—108 (1936).

Einige Bemerkungen über die V_3^8 des Raumes S_4 mit der Gleichung:

$F_2(x_1 x_2 x_3 x_4, x_2 x_3 x_4 x_0, x_3 x_4 x_0 x_1, x_4 x_0 x_1 x_2, x_0 x_1 x_2 x_3) + x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot \varphi_3(x_i) = 0$; wobei F_2 und φ_3 eine quadratische und eine kubische Form bedeuten. Die 10 Ebenen $x_i = x_j = 0$ sind doppelt, die 10 Geraden $x_i = x_j = x_l = 0$ sind dreifach, und die 5 Punkte (10000), (01000), ... sind vierfach für die V , die der wohlbekannten Fläche

6. Ordnung von J. Enriques analog ist. Die V besitzt keine kanonische Fläche; sie besitzt aber ein bikanonisches System, das mit dem System $|F|$ der Schnittflächen zusammenfällt; für sie ist $|2F'| = |3F|$ und $P_g = 0$, $P_2 = P_3 = 5$, $P_4 = 15$; usw. Verf. betrachtet auch die Schnittflächen 6. Ordnung von V mit den Hyperebenen $x_4 = \lambda x_3$, die Doppelebene $x_3 = x_4 = 0$ ausgenommen (sie besitzen drei durch einen Punkt hindurchgehende Doppelgeraden), und die V' , die aus V durch die Transformation $qx'_i = \frac{1}{x_i}$ entsteht.

E. G. Togliatti (Genova).

Fano, Gino: Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 329—349 (1936).

Untersuchungen über einige besondere dreidimensionale Mannigfaltigkeiten M_3^{2p-2} eines Raumes S_{p+1} , deren Schnittkurven kanonische Kurven des Geschlechts p sind. Die vorliegende Abhandlung dient als Einleitung in eine andere Untersuchung desselben Verf. über denselben Gegenstand (dies. Zbl. 15, 123 u. 372—373) und geht auch ähnlichen Untersuchungen von L. Roth (dies. Zbl. 16, 41) voran. — Wenn eine Schnittkurve der M_3^{2p-2} eine g_3^1 enthält, so gilt dasselbe für alle Schnittkurven; und M_3^{2p-2} ist Ort von ∞^1 Flächen 3. Ordnung φ_3 , die in den erzeugenden Räumen S_3 einer rationalen normalen V_3^{p-2} liegen. — Für $p = 5$ hat man eine M_3^8 des Raumes S_6 , die im allgemeinen als Schnitt- M_3 von 3 Quadriken erhalten werden kann; ihre Rationalität ist zweifelhaft (L. Roth hat in der obengenannten Arbeit mitgeteilt, daß sie irrational ist); aus einer ihrer Geraden läßt sie sich in eine M_3^4 des Raumes S_4 projizieren, die eine kubische Regelfläche enthält; die M_3^8 kann auch auf eine Involution 4. Ordnung des Raumes S_3 abgebildet werden. Enthält M_3^8 eine Ebene, so ist sie rational; ihr Abbildungssystem im Raume S_3 besteht aus Flächen F^4 , die eine Kurve C_3^9 enthalten. M_3^8 ist rational auch im Falle, wo sie eine normale kubische Regelfläche enthält; ihre Abbildung auf einem Raume S_3 ist sehr kompliziert und wird hier erreicht durch eine Abbildung der M_3^8 selbst auf eine besondere V_3^5 des Raumes S_6 mit elliptischen Schnittkurven (ihrerseits bildet sich diese auf S_3 ab durch das System aller F^3 , die eine C_0^3 und eine die C_0^3 schneidende Gerade enthalten); die hier betrachtete M_3^8 ist die Projektion einer besonderen M_3^{12} des S_8 . Die M_3^8 mit einem φ_3 -Büschel ist wahrscheinlich irrational und kann auf eine Involution 2. Ordnung im Raume S_3 abgebildet werden. — Für $p = 6$ hat man eine M_3^{10} im Raume S_7 . Im allgemeinen ist sie die Schnitt- M_3 einer V_4^5 mit elliptischen Schnittkurven mit einer Quadrik; sie kann in eine M_3^6 des Raumes S_4 projiziert werden, die eine rationale Regelfläche 4. Ordnung als Doppel­fläche enthält; sie kann auch auf eine Involution 6. Ordnung des Raumes S_3 abgebildet werden oder auch auf eine M_3^4 des Raumes S_4 mit einer doppelten C_0^3 . Es gibt zwei Unterarten der M_3^{10} , die eine Ebene enthalten; die eine kann in eine allgemeine V_3^3 des Raumes S_4 projiziert werden und ist wahrscheinlich irrational, die andere ist rational. Die M_3^{10} mit einem φ_3 -Büschel ist die Schnitt- M_3 einer rationalen normalen V_4^4 , Ort von $\infty^1 S_3$, mit einer kubischen Hyperfläche, die zwei S_3 der V_4^4 enthält; sie ist rational oder vielleicht nicht rational, je nachdem V_4^4 kein Kegel oder ein S_0 -Kegel ist. — Für $p = 7$ werden hier folgende M_3^{12} des Raumes S_8 betrachtet: a) die Schnitt- M_3 einer Quadrik mit der Segreschen V_3^6 , die die Punktepaare von zwei Ebenen darstellt; sie ist immer auf eine Involution 2. Ordnung des Raumes S_3 abbildbar; ihre Rationalität ist im allgemeinen zweifelhaft; b) die Schnitt- M_3 einer Quadrik mit einer anderen V_4^6 des Raumes S_8 ; diese ist die übrige Schnitt- V_4^6 des S_2 -Kegels, der eine Veronesesche Fläche aus einer Ebene π projiziert mit einer Quadrik, die den aus π projizierenden Kegel eines Kegelschnitts jener Fläche enthält; auch die Rationalität dieser anderen M_3^{12} ist zweifelhaft; c) die M_3^{12} mit einem φ_3 -Büschel; sie ist die Schnitt- M_3 einer rationalen normalen V_4^5 , Ort von $\infty^1 S_3$, mit einer kubischen Hyperfläche, die drei S_3 der V_4^5 enthält. — Auf die Menge von Einzelheiten, Konstruktionen, Abbildungen, besondere Eigenschaften der betrachteten M_3 , die in der Abhandlung entwickelt werden, ist es nicht möglich, hier einzugehen.

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Équation différentielle des asymptotiques et équations des cordes vibrantes qui s'y rattache. *Rev. math. Union Interbalkan.* 1, 135—137 (1936).

Hinreichende Bedingungen (Differentialgleichungen) für Flächen, deren Fundamentalgroßen der Relation $L + N = 0$ oder $L/N = \text{konst.}$ genügen. *W. Feller* (Stockholm).

Godeau, Robert: Une classe de surfaces dont les asymptotiques ont une équation différentielle donnée. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 1144—1155 (1936).

L'auteur donne une solution nouvelle du problème de Mitrinovitch (ce Zbl. 11, 369): trouver les surfaces S dont la projection des lignes asymptotiques sur le plan xy est déterminée par l'équation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \chi_0(x) + 2\chi_1(x) \cdot yy' + \chi_2(x)y^2 = 0$. L'examen minutieux le conduit à 11 types des surfaces S dont il donne l'équation en termes finis, la forme de coefficients χ_i et l'équation finie des asymptotiques (à une exception). *S. Finikoff* (Moscou).

Godeau, Robert: Remarque concernant l'article „Asymptotiques d'une classe de surfaces“. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 1156 (1936).

L'auteur donne une solution complémentaire du problème traité dans la Note citée de Mitrinovitch (ce Zbl. 15, 41). *S. Finikoff* (Moscou).

Boggio, Tommoso: Sulla curvatura delle superficie e sulle reti di Čebicef. *Scritti mat. Luigi Berzolari* 315—328 (1936).

En appliquant la théorie vectorielle des surfaces développée dans le livre de BURGATTI, Boggio, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, Bologna 1930, l'auteur montre que le rayon-vecteur P d'un point générique de la surface (P) rapportée au réseau x, y de ČEBIČEFFS satisfait à l'équation $\frac{\partial_i^2 P}{\partial x \partial y} = 0$ où $\frac{\partial_i^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial_x}{\partial x} \frac{\partial_i}{\partial y} P$ et la dérivée superficielle $\frac{\partial_i P}{\partial x}$ est la projection sur le plan tangent du vecteur $\frac{\partial P}{\partial x}$. L'angle ω des lignes x, y satisfait l'équation $K = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ où K est la courbure totale de la surface. *S. Finikoff* (Moscou).

Robinson, Robin: A condition in invariant form for a net without detours. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 102—104 (1937).

Ein Kurvennetz auf einer Fläche heißt „Netz ohne Umwege“, wenn sämtliche Verbindungen zweier Punkte, die aus lauter Netzbogen bestehen, die gleiche Länge haben. Dazu muß offenbar auf jeder Schar des Netzes das Vorzeichen der Längenbestimmung geeignet festgesetzt werden. Verf. gibt eine Bedingung für Netze ohne Umwege in invarianter Form: Die beiden Kurvenscharen $\Phi(u, v) = \text{konst.}$ und $\Psi(u, v) = \text{konst.}$ bilden dann und nur dann ein solches Netz, wenn

$$J \left[\Phi_1, \frac{D(\Delta_1 \Psi)^{\frac{1}{2}}}{J(\Phi, \Psi)} \right] = \pm J \left[\Psi, \frac{D(\Delta_1 \Phi)^{\frac{1}{2}}}{J(\Phi, \Psi)} \right].$$

Hier bedeutet $J(\Phi, \Psi)$ die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen in bezug auf u und v , Δ_1 ist Beltrami's erster Differentialoperator und $D^2 = EG - F^2$. — Wenn das Netz bei jeder Orientierung ohne Umwege ist, müssen beide Seiten der Gleichung verschwinden. *G. Bol* (Hamburg).

Sen, R. N.: On a type of three-dimensional space compatible with Clifford's parallelism. *Tôhoku Math. J.* 42, 226—229 (1936).

Professor WHITTAKER, in *J. London Math. Soc.* 5 (1930), has given the equations of the ds^2 of some three-dimensional Riemannian manifolds admitting a Clifford parallelism. The author, in this present paper, finds several properties of these manifolds. The Riemannian curvature for orientations normal to any system of parallel directions is constant. The sum of the three Riemannian curvatures corresponding to any three mutually orthogonal directions at a point, as well as the scalar curvature, is also constant. *D. J. Struik* (Cambridge).

Schouten, J. A., and J. Haantjes: On the theory of the geometric object. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 356—376 (1937).

Several definitions have been given of a geometrical object, but all lack a certain rigor. A correspondence with A. Wundheiler has induced the authors to propose in this paper a more rigorous theory, in which the different types of geometrical objects are classified. The definition starts from the concept of an N -dimensional topological space, in which a geometric region R_g , with points Ξ (its coordinates Ξ^1, \dots, Ξ^N are numbers), are defined together with coordinate systems that can be obtained from one of them by the transformations of a given group or pseudogroup \mathfrak{G} .

Corresponding to every coordinate system $B \left(\overset{0}{B}, \overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \text{etc.} \right)$ and every point $\Xi \left(\overset{0}{\Xi}, \overset{1}{\Xi}, \overset{2}{\Xi}, \text{etc.} \right)$ in R_g a finite set of numbers $\Omega_{B, \Xi, 1}, \Omega_{B, \Xi, 2}$ etc., short $\Omega_{B, \Xi}$, are given by functional relations of the form

$$\Omega_{\overset{0}{B}, \overset{1}{\Xi}}^{\overset{K}{\kappa}} = \Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{K}{\kappa}} \left(\overset{K}{\Xi} \right), \quad K, A = 0, 1, 2, \dots$$

The numbers $\Omega_{B, \Xi}$ are called components of the object. If $\overset{0}{B}$ and $\overset{1}{B}$ are two arbitrarily chosen coordinate systems, the $\Omega_{B, \Xi}$ can be written as functionals of the function of transformation $\overset{1,0}{t}$ and the coordinates $\overset{0}{\Xi}$ of the point Ξ with respect to the coordinate system $\overset{0}{B}$ as follows:

$$\Omega_{\overset{0}{B}, \overset{1}{\Xi}} = F^{(0)} \left(\overset{1,0}{t}, \overset{0}{\Xi} \right),$$

the form of the functional $F^{(0)}$ depending only on the choice of $\overset{0}{B}$ and not on the choice of $\overset{1}{B}$ or $\overset{1}{\Xi}$. We can write instead of this equation:

$$\Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{1}{1}} = F^{(0)} \left(\overset{1,0}{t} \right),$$

in which equation the function $\Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{1}{1}}$ is expressed as a functional of the function $\overset{1,0}{t}$ and the form of the functional $F^{(0)}$ depends only on the choice of $\overset{0}{B}$ and not on the choice of $\overset{1}{B}$. — Classification can be obtained by calling $\overset{1}{B}$ and $\overset{2}{B}$ as belonging to the same functional class with respect to Ω , if $\Omega_{\overset{1}{B}}^{\overset{1}{1}} = \Omega_{\overset{2}{B}}^{\overset{1}{1}}$, and by calling an object functionally closed if the system of functional classes is invariant with \mathfrak{G} . If from

$$\Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{1}{1}} = F^{(0)} \left(\overset{1,0}{t} \right), \quad \Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{2}{2}} = F^{(0)} \left(\overset{2,0}{t} \right)$$

follows, that $\Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{2}{2}}$ is a functional of $\Omega_{\overset{0}{B}}^{\overset{1}{1}}$ and $\overset{2,1}{t}$, but is independent of the choice of $\overset{1}{B}$ and $\overset{2}{B}$, we call the object macrogeometric. The theorem is proved that an object is functionally closed if and only if it is macrogeometric. For further classification we refer to the paper. Many examples illustrate the definitions. *D. J. Struik.*

Bortolotti, Enea, e Václav Hlavatý: Contributi alla teoria delle connessioni. I. Connessioni proiettive: Costruzione al finito, classificazione secondo Klein. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 15, 1—45 u. 129—154 (1936).

This paper, the first of a promised series, attempts to give a simplified and more satisfactory reconstruction of the theory of projective connections. The explicit expression of the connection is obtained by a process of passing to a limit from equations holding in a finite region, in this way avoiding the suspicious "points at infinitesimally small distance". Geodesics, curvature, torsion, affine, metrical and euclidean connections are discussed, and also metrical non-euclidean connections. The different approaches to the subjects, existing in the literature, are classified. The paper has many references and contains an extensive bibliography. *D. J. Struik.*

Picasso, Ettore: Connessioni proiettive di specie superiore. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 1—16 (1936).

Diese Abhandlung beruht auf zwei Gedanken Bortolottis: Erstens wird hier der

Vitalische Kalkül nach dem Bortolottischen Verfahren zur Herstellung der Differentialgeometrie einer X_m in P_n (= lin. proj. Raum) herangezogen (vgl. dies. Zbl. 3, 322), zweitens wird das Bortolottische C -Bezugssystem [vgl. Bortolotti, Rend. Circ. mat. Palermo 56, 1–57 (1932); dies. Zbl. 4, 308, und auch Bortolotti-Hlavatý, vorst. Ref.] zum C -Bezugssystem der Geometrie höherer Art verallgemeinert, das ist, es wird in σ_v (= die Totalität der v -Oskulationsräume der X_m) ein C -Bezugssystem konstruiert. Die Transformationsweise seiner Koordinatenpunkte ergeben die gemischten Komponenten $\Theta_{\beta_v}^{\alpha_v}$, $\Theta_{\beta_v}^{\alpha_v}$ des Einheitsaffinors in σ_v mit zusammengesetzten Vitalischen Indices α_v , β_v , α_v , β_v . Diese Komponenten dienen dann zur üblichen Definition der Größen in σ_v . — Mit $Y_m^{p_v-1}$ soll der zu σ_v assoziierte (anholonome) Raum bezeichnet werden, wobei $p_v = n - M_v$ und M_v die Dimensionszahl von σ_v bezeichnet. Das (verallgemeinerte) Projektionsverfahren von Levi-Civita gestattet dann die Konstruktion der induzierten Konnexionen in σ_v und Y samt den zugehörigen Eulerschen Krümmungsaffinoren. Diese Begriffe ermöglichen dann die Konstruktion der Fundamentalgleichungen für σ_v und Y , welche in natürlicher Weise zu einem Existenztheorem führen. — Die Arbeit wird mit der Diskussion des Falles $m = 2$ beendet. Hlavatý (Praha).

Segre, Beniamino: Una proprietà di certi spazi di Veblen ed alcune estensioni al campo differenziale della nozione di birapporto. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 5—26 (1936).

L'auteur examine les surfaces γ dans l'espace projectif S_n dont les coordonnées homogènes d'un point générale satisfont à une équation de Laplace et qui portent ∞' courbes planes L . Solutions: 1° γ est une surface arbitraire de S_4 , 2° les plans π de L passent par une droite fixe ou enveloppent un cône ou sont osculateurs à une ligne; 3° γ appartient à S_5 , les plans π sont arbitraires; si l'on donne une seule L , toutes les autres sont déterminées. Applications: 1° à l'espace de Veblen, 2° à la théorie des congruences W en S_3 (dont l'image en Q de S_5 est précisément γ).

S. Finikoff (Moscou).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:

Bundgaard, S., und S. Duerlund: Zwei Bemerkungen über konvexe Figuren. Mat. Tidsskr. B 1937, 81—85 [Dänisch].

I. Eine abgeschlossene beschränkte ebene Punktmenge mit der Eigenschaft, daß für jeden äußeren Punkt P die kürzeste Verbindung von P mit der Menge eindeutig bestimmt ist, ist konvex. Für diesen erstmalig von Motzkin (vgl. dies. Zbl. 11, 411) bewiesenen Satz wird ein einfacherer Beweis angegeben. — II. Nach Bieberbach [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 24, 247—250 (1915)] hat der Kreis unter allen Bereichen desselben Durchmessers den größten Flächeninhalt. Der Beweis dafür, daß der Kreis der einzige Bereich mit dieser Eigenschaft ist, kann auf den Satz gestützt werden: Ein konvexer Bereich, der durch Symmetrisierung in einen Kreis vom selben Durchmesser übergeführt werden kann, ist selbst ein Kreis. Hierfür wird ein einfacher Beweis angegeben. W. Fenchel (Kopenhagen).

Pál, J. F.: Über Schwerpunkte konvexer Figuren. Mat. Tidsskr. B 1937, 101—103 [Dänisch].

Es sei μ ein ebener konvexer Bereich mit inneren Punkten und vom Durchmesser 1. Ferner sei $f(\mu)$ der Abstand des Flächenschwerpunktes vom Schwerpunkt der Randkurve und ϱ die obere Grenze von $f(\mu)$ für die betrachteten Bereiche. Vermutlich ist $\varrho = \frac{1}{3}$, und dieser Wert wird für kein μ erreicht. Verf. zeigt mit sehr einfachen Mitteln erstens: $\varrho \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi}$, zweitens: wenn ϱ nicht erreicht wird, so ist $\varrho = \frac{1}{3}$, drittens: der Umfangsschwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Verbindungsstrecke des Flächenschwerpunktes mit dem Mittelpunkt des Inkreises und teilt diese Strecke im Verhältnis 1:2. Hieraus ergibt sich $f(\mu) < \frac{1}{3}$ für Dreiecke. W. Fenchel.

Blaschke, Wilhelm: Sulla proprietà isoperimetrica del cerchio. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 233—234 (1937).

Es sei C eine Eilinie vom Inhalt a und Umfang l , ferner s die von einem willkürlichen Punkt gemessene Bogenlänge und $r = r(s, \tau)$ die Länge der durch den Punkt s gehenden orientierten Sehne, die mit der Tangente in s den Winkel τ einschließt. Durch einfache integralgeometrische Schlüsse wird die Relation

$$\int_0^l \int_0^\pi \int_0^\pi (r \sin \tau' - r' \sin \tau)^2 ds d\tau ds' d\tau' = 2\pi a(l^2 - 4\pi a)$$

bewiesen, aus der sich unmittelbar die isoperimetrische Ungleichung und die Bedingung für Gleichheit ergeben.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Gericke, H.: Über eine Ungleichung für gemischte Volumina. Integralgeometrie 23. Deutsche Math. 2, 61—67 (1937).

Die Minkowskische Ungleichung $M^2 \geq 4\pi F$ ist von Santaló (Integralgeometrie V, dies. Zbl. 14, 125) und Blaschke (Integralgeometrie X, dies. Zbl. 13, 221) auf verschiedenen integralgeometrischen Wegen bewiesen worden. Verf. überträgt beide Wege auf den n -dimensionalen Raum und erhält so Beweise für das (z. B. aus dem Brunn-Minkowskischen Satz folgende) n -dimensionale Analogon $W_{n-1}^2 \geq \kappa_n W_{n-2}$ der Ungleichung, wo W_i das i -te gemischte Volumen eines konvexen Körpers mit der Einheitskugel (also i mal Einheitskugel, $n - i$ mal Körper) und κ_n das Volumen der Einheitskugel bedeuten, und dafür, daß das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Alexandrov, A.: Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 155—157 (1937).

Beweisskizze für die allgemeine Ungleichung

$$V_{123 \dots n}^2 \geq V_{113 \dots n} V_{223 \dots n}$$

zwischen den gemischten Volumina konvexer Körper des n -dimensionalen Raumes. Die diesbezgl. Arbeit des Ref. (vgl. dies. Zbl. 15, 120) scheint dem Verf. noch nicht bekannt gewesen zu sein. Der Beweis des Verf. ist von dem des Ref. wesentlich verschieden und besteht in einer Verallgemeinerung und Algebraisierung durch Polyederapproximation des Beweises von Hilbert für die Minkowskischen Ungleichungen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Linsman, M.: Une remarque sur les points singuliers des surfaces réelles. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 1059—1063 (1936).

Verf. betrachtet Flächenstücke F (d. h. topologische Quadratbilder) im (euklidischen) R_3 , wobei das Kontingent in jedem Punkte von F mit der Oberfläche eines konvexen Kegels identisch sein soll. Ein Punkt P von F heiße kontingent-regulär (k.-r.) bzw. paratingent-regulär (p.-r.), wenn das Kontingent bzw. das Paratingent von F in P sich auf eine Ebene reduziert. (Ein p.-r. Punkt ist von selbst k.-r.) Ist ein Punkt von F nicht k.-r., so heiße er singulär. Nun seien die Punkte von F sämtlich p.-r., ausgenommen einen einzigen singulären Punkt S . Verf. konstruiert dann gewisse topologische Abbildungen, bei welchen F übergeführt wird in ein F' , auf welchem das Bild S' von S mindestens k.-r. ist, während die sämtlichen übrigen Punkte von F' wieder p.-r. sind. Man erhält nun eine Einteilung solcher isolierter singulärer Punkte S in zwei Klassen entsprechend den Fällen, daß S' entweder (bei mindestens einer der Abbildungen) sogar p.-r. ist (p.-r. singulärer Punkt) oder bei allen Abbildungen nur k.-r. (k.-r. singulärer Punkt). Die Existenz, insbesondere k.-r. singulärer Punkte, sogar auf algebraischen Flächen, wird nachgewiesen.

Haupt (Erlangen).

Pauc, Christian: Ensemble des systèmes finis de points d'un continu. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 839—841 (1937).

Dans cette note extrêmement condensée l'auteur poursuit ses recherches sur les critères sélectifs de continus K dans un espace distancié, qui sont fournis par l'étude de la connexité de certains éléments abstraits (ensemble des systèmes ordonnés ou

non ordonnés de n points de K , ensemble des hyperdirections attachées aux systèmes ordonnés de n point, multiparatingent généralisé, paratingent global). D'autres critères sont fournis lorsqu'on impose aux n points de chaque système la condition d'être indépendants (la dépendance étant définie axiomatiquement dans la note). — Ces critères permettent de séparer des autres continus les arcs et les cercles topologiques. Aucune démonstration n'est donnée, un prochain développement est annoncé.

E. Blanc (Paris).

Seorza Dragoni, Giuseppe: Maggiore determinazione di un teorema fondamentale dell'analisi e sue applicazioni. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 180—185 (1937).

L'auteur fait observer que la démonstration du théorème sur la continuité uniforme et celle d'un théorème d'inversion dû à Bolza sur les fonctions biunivoque, se trouvent facilitées lorsqu'on remplace le théorème de recouvrement de Borel par le théorème suivant, qui s'en déduit d'ailleurs avec facilité: Si à tout point P d'un ensemble fermé borné E d'un espace euclidien on associe une hypersphère $\Sigma(P)$ ayant pour centre ce point, on peut déterminer un nombre fini d'hypersphères $\sigma(P_i)$ centrées aux points P_i et telles que: 1° $\sigma(P_i)$ soit contenue dans $\Sigma(P_i)$; 2° l'ensemble E soit recouvert par la réunion des $\sigma(P_i)$; 3° si $\sigma(P_j)$ et $\sigma(P_i)$ ont des points communs, ou bien $\sigma(P_i)$ est contenue (au sens strict) dans $\Sigma(P_i)$, ou bien $\sigma(P_j)$ est contenue dans $\Sigma(P_j)$.

E. Blanc (Paris).

Topologie:

Heegaard, Poul: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 685—693 (1936).

In this paper presented at the International Topology Conference, Moscow, 1935, the author surveys various attempts which have been made to solve the four-color problem. He deals particularly with reductions of the problem to systems of arithmetical congruences, the unknowns of which correspond to the regions, or to the edges, or to the vertices of the map.

A. W. Tucker (Princeton, N. J.).

Kampen, E. R. van: On the argument functions of simple closed curves and simple arcs. Compositio Math. 4, 271—275 (1937).

Wenn ein Punkt P eine einfache geschlossene ebene Kurve C durchläuft, so beträgt die Gesamtänderung des Winkels, den die Tangente in P an C mit einer festen Richtung einschließt, 2π . Dieser von Ostrowski herrührende „Umlaufsatz“ sowie eine von Ostrowski herrührende Verallgemeinerung des Rolleschen Theorems wird neu und unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen. [Vgl. Ostrowski, Compositio Math. 2, 26—49 u. 177—200 (1935) und H. Hopf, Compositio Math. 2, 50—62 (1935); dies. Zbl. 11, 177 u. 12, 35.]

H. Seifert (Heidelberg).

Whitney, Hassler: On regular closed curves in the plane. Compositio Math. 4, 276—284 (1937).

Es werden geschlossene Kurven mit stetig sich ändernder Tangente, aber beliebigen Schnittpingularitäten betrachtet. Jeder solchen Kurve kommt eine bestimmte Umlaufzahl zu, nämlich die Gesamtänderung des Winkels, den die Tangente mit einer festen Richtung einschließt, wenn der Berührungspunkt die Kurve einmal durchläuft. Es wird bewiesen, daß zwei Kurven mit derselben Umlaufzahl ineinander deformierbar sind. Besitzt die Kurve nur endlichviele einfache Schnittpingularitäten, so läßt sich die Umlaufzahl durch die algebraische Anzahl der Schnitte ausdrücken. *H. Seifert.*

Eilenberg, Samuel: Sur les courbes sans nœuds. Fundam. Math. 28, 233—242 (1936).

Als Verschärfung eines früheren Resultates von Borsuk und dem Verf. (Fundam. Math. 26, 215; dies. Zbl. 13, 421) wird bewiesen: Es seien zwei einfache geschlossene Kurven C_1 und C_2 im S^3 gegeben; dann und nur dann ist die eine Kurve ein Deformationsretrakt des Komplementärraumes zu der anderen, wenn die Verschlingungszahl der beiden Kurven 1 und die Fundamentalgruppe des betreffenden Komplementärraumes unendlich zyklisch ist. Diese letzte Bedingung (die auch als die Abwesenheit

einer Verknötung der Kurve gedeutet werden kann) ist, wie Verf. zeigt, damit äquivalent, daß der Komplementärraum zu der Kurve in sich stetig in ein eindimensionales Polyeder zusammengezogen werden kann (gleichbedeutend damit ist die Zusammenziehbarkeit des Komplementärraumes in eine kompakte Menge). Es werden auch weitere Sätze aus demselben Ideenkreis bewiesen.

P. Alexandroff (Moskau).

Borsuk, Karol: Sur les transformations de polyèdres acycliques en surfaces sphériques. *Fundam. Math.* 28, 203—210 (1936).

Beweis des folgenden Satzes: Ein azyklisches Polyeder kann auf keine Sphäre wesentlich abgebildet werden.

P. Alexandroff (Moskau).

Smith, P. A.: Transformations of period two. *Rec. math. Moscou, N. s.* 1, 761—764 (1936).

Beweisskizze des folgenden Satzes: M sei die n -dimensionale Sphäre und T eine topologische Selbstabbildung von M mit der Periode 2, L die Menge der Fixpunkte. Dann gibt es eine ganze Zahl r , $0 \leq r \leq n$, so daß die Bettischen Gruppen mod 2 von L diejenigen der r -Sphäre sind, während die Dimension mod 2 von L gleich r ist.

H. Seifert (Heidelberg).

Kaufmann, B.: On the extension of the Pflastersatz. II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 33, 13—20 (1937).

Unter einem r -dimensionalen Kern (Nukleus) versteht Verf. eine r -dimensionale abgeschlossene Teilmenge F einer Euklidischen n -dimensionalen Vollkugel \bar{U} , welche im Innern dieser Vollkugel eine irreduzible Verschlingung [mit $(n - r - 1)$ -dimensionalem Zyklus] zuläßt (Alexandroff, Dimensionstheorie. *Math. Ann.* 106). Ein r -dimensionaler Mannigfaltigkeitspunkt ist ein Punkt (eines Kompaktums $F \subset R^n$), welcher Durchschnitt einer abnehmenden Folge von r -dimensionalen Kernen von F ist. Folgende Sätze werden bewiesen: Es sei \mathcal{U} eine kanonische endliche abgeschlossene Überdeckung des r -dimensionalen Kompaktums $F \subset R^n$ [kanonisch bedeutet: der Durchschnitt von k Elementen der Überdeckung ist höchstens $(r - k + 1)$ -dimensional]. Wenn ε hinreichend klein ist, so gibt es (dem Durchmesser nach) beliebig kleine Kerne (aller Dimensionen von 0 bis r), welche Punkte enthalten, die zu $r + 1$ Elementen von \mathcal{U} gehören. Hieraus folgt leicht, daß es Mannigfaltigkeitspunkte beliebiger Dimension h , $0 \leq h \leq r$, mit der gleichen Eigenschaft gibt. Unter denselben Bedingungen existiert ein System beliebig kleiner Kerne $f_0, f_1, f_2, \dots, f_r$, bzw. der Dimensionen $0, 1, \dots, r$, von der Eigenschaft, daß jeder Punkt von f_h zu mindestens $r - h + 1$ Elementen der Überdeckung gehört und f_h durch f_{h-1} zerlegt wird. Es gibt auch zu jedem h , $0 \leq h \leq r$, ein System von $r - h + 1$ Elementen von \mathcal{U} , deren Durchschnitt eine h -dimensionale Menge von Mannigfaltigkeitspunkten jeder Dimensionszahl zwischen 0 und r (inkl.) enthält. Die Beweise beruhen auf dem folgenden Begriff einer induktiven Verschlingungskonfiguration: Ein System von abgeschlossenen kompakten $(r - j)$ -dimensionalen Mengen A^{r-j} , $j = 0, 1, \dots, r$, und von $(n - r + j - 1)$ -dimensionalen Zyklen $z^{n-r+j-1}$ heißt eine induktive Verschlingungskonfiguration, wenn bei jedem j die Menge A^{r-j} durch die Menge A^{r-j-1} in zwei echte Teilmengen A_1^{r-j} und A_2^{r-j} mit dem Durchschnitt A^{r-j-1} zerlegt wird und der Zyklus $z^{n-r+j-1}$ gemeinsamer Rand zweier algebraischer Komplexe C_1^{n-r+j} und C_2^{n-r+j} ist, wobei C_1^{n-r+j} in $U - A_1^{r-j}$ und C_2 in $U - A_2^{r-j}$ liegt, und schließlich $z^{n-r+j-1}$ in $U - A$ nicht berandet (U ist dabei ein festes Kugelinneses des R^n). (I. vgl. dies. Zbl. 14, 135.)

P. Alexandroff.

Whitney, Hassler: Sphere-spaces. *Rec. math. Moscou, N. s.* 1, 787—791 (1936).

Bericht über eine noch nicht erschienene Arbeit über Räume, die mit r -dimensionalen Sphären „gefasst“ sind.

H. Seifert (Heidelberg).

Kolmogoroff, A.: Homologiering der Komplexe und des lokal-bikompakten Raumes. *Rec. math. Moscou, N. s.* 1, 701—705 (1936).

To form a ring of dual simplicial chains, with rational coefficients, the author introduces a product $[f^r, f^s] = f^{r+s}$ defined by

$$4(r + s + 1) f^{r+s}(x^{r+s}) = \sum f^r(x^{r-1}x^0) f^s(x^0x^{s-1}) \text{ for all joins } x^{r-1}x^0x^{s-1} = x^{r+s}.$$

This product combines with the ordinary join $f^r f^s = f^{r+s+1}$ in the relation

$$(r + s + t + 2) [f^r f^s, f^t] = (s + t + 1) f^r [f^s, f^t] + (-1)^{(r+s)(s+1)} (r + t + 1) f^s [f^r, f^t],$$

and satisfies a product-boundary formula of the standard type

$$(r + s + 1) e^0 [f^r, f^s] = (r + 1) [e^0 f^r, f^s] + (-1)^r (s + 1) [f^r, e^0 f^s],$$

where e^0 is a dual-boundary operator. The homology-ring theory thus developed rounds out the author's duality theory and is directly applicable to his homology theory of locally bicomact spaces [Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 97—102 (1936) and C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1144, 1325, 1558, 1641 (1936); this Zbl. **14**, 38 and **13**, 422, 423; **14**, 38, 39]. For a comparison with the work of Alexander and Čech [Ann. of Math., II. s. **37**, 698—708 and 681—697 (1936)] see the ample reviews by the author in this Zbl. **15**, 129—132. A. W. Tucker (Princeton, N. J.).

Quantentheorie.

Flint, H. T.: Ultimate measurements of space and time. Proc. Roy. Soc. London A **159**, 45—56 (1937).

Spekulative Betrachtungen in dem Sinne, daß $\frac{h}{m_0 c}$ bzw. $\frac{e^2}{m_0 c^2}$ als kleinstmögliche Längen anzusehen sind. Relativistische und quantentheoretische Gesichtspunkte werden zu einer Präzisierung und näheren Ausführung dieser Idee herangezogen.

P. Jordan (Rostock).

Weiss, P.: Born's electrodynamics in complex form. Proc. Cambridge Philos. Soc. **33**, 79—93 (1937).

Die Bornsche Elektrodynamik, operierend mit 2 Sechservektoren f_{kl} und p_{kl} , wird ausführlicher und systematischer als bisher untersucht. In bekannter Weise aus f_{kl} bzw. p_{kl} die dreidimensionalen Vektoren \mathfrak{B} und \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{S} und \mathfrak{D} bildend, bekommt man außer den schon bisher untersuchten Invarianten (gewöhnlich F, G, P, Q genannt) noch zwei weitere: $2R = \mathfrak{B}\mathfrak{S} - \mathfrak{D}\mathfrak{E}$; $2S = \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{S}$; die zwischen ihnen und den f_{kl}, p_{kl} bestehenden Tensorrelationen werden systematisch entwickelt. Zwischen R, S sowie $2F = \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2$; $2P = \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{S}^2$; $G = \mathfrak{B}\mathfrak{E}$; $Q = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$ bestehen die Beziehungen

$$FP + GQ = S^2 - R^2; \quad FQ - PQ = 2RS$$

als Folge der Symmetrie des Energietensors, die sich aus der Existenz einer Lagrange-funktion (ohne Spezialisierung dieser) ergibt. Es wird eine gewisse Symmetriebedingung entwickelt, welche eine Einschränkung für die Wahl der Lagrange-funktion bedeutet. Unter dieser Einschränkung wird eine komplexe Formulierung der Theorie — in sehr durchsichtiger Gestalt — möglich; jedoch ist diese nicht dieselbe wie nach Schrödinger. Die von Born und Infeld diskutierten Lagrange-funktionen

$$L = \sqrt{1 + 2F} - 1; \quad L = \sqrt{1 + 2F - G^2} - 1$$

entsprechen zwar gerade nicht der Weisssschen Symmetriebedingung; doch gibt es Weissssche Lagrange-funktionen, die zu ganz ähnlichen Ergebnissen führen.

P. Jordan (Rostock).

Infeld, L.: A new group of action functions in the unitary field theory. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. **33**, 70—78 (1937).

Bezeichnungen: $F = \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl}$; $P = \frac{1}{2} p_{kl} p^{*kl}$; $R = \frac{1}{2} f_{kl} p^{kl}$. Nach früheren Ergebnissen ergibt das Variationsprinzip

$$\delta \int T d\tau = 0; \quad d\tau = dx dy dz dt; \quad \dot{T} = T(F, P, R)$$

die elektromagnetischen Feldgleichungen (nichtlineare Verallgemeinerung der Maxwell'schen), falls die beiden Gleichungssysteme

$$p^{kl} = \frac{\partial T}{\partial f_{kl}} \quad \text{und} \quad f^{*kl} = \frac{\partial T}{\partial p_{kl}^*}$$

gleichbedeutend sind. Ohne wesentlichen Verlust an Allgemeinheit kann $T = T(F, P)$ (ohne R) angenommen werden. Dann muß $T = T\left(\sqrt{-\frac{F}{P}}\right)$ sein. Es wird nun nach Funktionen T gesucht, die a) für schwache Felder die Maxwellschen Gleichungen ergeben; b) eine endliche Selbstenergie des Elektrons liefern. Dem genügen die Ausdrücke

$$T = \frac{1}{\varepsilon} + (1 - \gamma) \log \varepsilon + \gamma \varepsilon - (1 + \gamma); \quad \varepsilon = \sqrt{-\frac{F}{P}}$$

mit beliebiger Konstante γ . Die Bornsche Theorie ergibt sich für $\gamma = 1$; für $\gamma \neq 1$ entfällt die Symmetrie von Magnetismus und Elektrizität. Der Fall $\gamma = 0$ wird zu einer Diskussion der Feinstrukturkonstanten durch Vergleich mit Heisenberg-Euler-Kokkel benutzt. (I. vgl. dies. Zbl. 13, 236.)

P. Jordan (Rostock).

Fock, V.: Widerlegung der Neutrinotheorie des Lichtes. Ž. eksper. teoret. Fis. 7, 1—5 u. deutsch. Zusammenfassung 6 (1937) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß, wenn man die üblichen Vertauschungsrelationen für die NeutrinoWellenfunktionen annimmt und aus ihnen nach Jordan die Lichtamplituden bildet, sich diese als vertauschbar ergeben. Jordan hatte statt dessen die richtigen Vertauschungsrelationen für Feldgrößen mit Bosestatistik erhalten. Diese wird damit begründet, daß in Jordans Rechnung ein Term $\infty - \infty$ unrichtig ausgewertet ist. Es wird jedoch nicht gezeigt, an welcher Stelle der Jordanschen Rechnung dies eintritt.

R. Peierls (Cambridge).

Sakai, Takuzō: The H -theorem in quantum mechanics. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 172—189 (1937).

Im grundsätzlichen Verständnis der thermodynamisch-statistischen Gesetze in ihrem Zusammenhang mit den quantenphysikalischen Gesetzen bestand eine wesentliche Lücke insofern, als einerseits die Paulischen Überlegungen ergeben hatten, daß eine besondere Hypothese, nämlich die Hypothese einer völligen Ungeordnetheit der wellenmechanischen Phasenkonstanten, als korrespondenzmäßiges Analogon der klassisch-statistischen Unordnungshypothesen nötig sei, während andererseits die v. Neumannschen Untersuchungen keine derartige Hypothese zu benötigen schienen. Es wird nun ausgeführt, daß die Messungsprozesse der v. Neumannschen Theorie der Paulischen Phasenmittelung entsprechen, wonach Übereinstimmung beider Theorien besteht.

P. Jordan (Rostock).

Coulson, C. A.: A note on the criterion of maximum overlapping of wave functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 111—114 (1937).

Wenn die Eigenfunktion eines Elektrons in einer zweiatomigen Molekel in der Form $\lambda \psi_a + \mu \psi_b$ durch Eigenfunktionen ψ_a und ψ_b eines Elektrons in jedem der Atome angenähert wird, so ergeben sich bekanntlich zwei Möglichkeiten für λ/μ und man erwartet bei positivem $\int \psi_a \psi_b d\tau$ für positives λ/μ den tieferen der beiden Terme. Hier wird ein Kriterium für das Eintreffen dieser Erwartung angegeben. F. Hund.

Bell, R. P.: Exact and approximate expressions for the permeability of potential barriers to light particles. Proc. Roy. Soc. London A 158, 128—136 (1937).

Aufstellung und Diskussion verschiedener Formeln für die Durchlässigkeit von Potentialschwellen. Hat diese eine parabolische Form, so ist eine exakte Lösung möglich. Die Anwendung auf Probleme der Reaktionsgeschwindigkeiten bietet jedoch verschiedene Schwierigkeiten.

P. Jordan (Rostock).

Lowen, Irving S.: The effect of nuclear motion in the Dirac equation. Physic. Rev., II. s. 51, 190—194 (1937).

Es wird der Einfluß der Mitbewegung des Kerns auf die Energieeigenwerte der Bewegung eines Elektrons im Felde des Kerns mit Hilfe der Diracschen Wellengleichung behandelt. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten [z. B. Bechert u. Meixner, Ann. Physik 22, 525 (1935); dies. Zbl. 11, 186] wird auch die Bewegung des Kerns mit einer Diracschen Wellengleichung beschrieben und für die Wechselwirkung der Breitsche

Ausdruck angesetzt. Die Termkorrekturen werden bis zur Ordnung $(m/M)^2$ ausgewertet (m ist die Masse des Elektrons, M die Masse des Kerns). Die Beiträge der Ordnung $(m/M)^2$ sind kleiner als die Hyperfeinstrukturaufspaltung und können daher vernachlässigt werden, die Beiträge der Ordnung m/M geben eine Korrektur von der gleichen Größenordnung wie die unrelativistische Behandlung der Kernbewegung.

V. Weisskopf (Kopenhagen).

Møller, C.: On the capture of orbital electrons by nuclei. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 84—85 (1937).

Nach der Fermischen Theorie sollte jeder Kern, der Positronen emittieren kann, statt dessen auch in der Lage sein, ein Elektron aus der K -Schale zu absorbieren. Für schwere Elemente, für die die Elektronendichte in der K -Schale groß ist, und für kleine Umwandlungsenergien, bei denen die Ersparnis von $2mc^2$ in der Energiebilanz eine große Rolle spielt, wird der Absorptionsprozeß häufiger als die Emission eines Positrons. Für $^{193}_{78}\text{Pt}$ ergibt sich z. B., daß die Absorption 9- bzw. 47 mal häufiger sein soll, wenn man den Fermischen bzw. den Uhlenbeck-Konopinskischen Ansatz für den Wechselwirkungsterm macht.

R. Peierls (Cambridge).

Kemmer, N.: Über die Lichtstreuung an elektrischen Feldern nach der Theorie des Positrons. *Helv. physica Acta* 10, 112—122 (1937).

Verf. stellt einen allgemeinen Ausdruck für die Intensität der Lichtstreuung an elektrischen Feldern auf Grund der Theorie des Positrons auf und berechnet diese für den Spezialfall der Streuung von kleinen Frequenzen an langsam veränderlichen Feldern. Es zeigt sich, daß diese Rechnungen unabhängig von speziellen Annahmen über die Beseitigung der Divergenzen der Positrontheorie sind. Die Resultate führen zu der Aufstellung einer Lagrangefunktion für die Elektrodynamik des Vakuums bei schwach veränderlichen Feldern, die mit der von Euler und Kockel [*Naturwiss.* 23, 246 (1935); dies. Zbl. 11, 141] abgeleiteten identisch ist. Die vorliegende Ableitung ist jedoch den früheren überlegen, da keine Annahmen über die Beseitigung der Divergenzen gemacht worden sind.

V. Weisskopf (Kopenhagen).

Rose, M. E., and H. A. Bethe: Nuclear spins and magnetic moments in the Hartree model. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 205—213 (1937).

Benutzt man zur Beschreibung der leichten Atomkerne das Hartree-Modell mit Oszillatoreigenfunktionen, so kann man die magnetischen Momente der verschiedenen Kerne bis O^{16} ausdrücken durch die bekannten von Neutron und Proton. Dabei werden für den Grundzustand die von Feenberg und Wigner (dies. Zbl. 16, 94) unter Annahme von Russell-Saunders-Kopplung und unter Vernachlässigung der Spinabhängigkeit der Kräfte berechneten Terme zugrunde gelegt. Eine rechnerische Schwierigkeit entsteht dabei dadurch, daß in den meisten Fällen der Grundterm mit anderen Termen gleicher Symmetrie entartet ist, so daß zunächst die richtige Linearkombination von Eigenfunktionen aufgesucht werden muß. Als Kräfte werden Majorana-Kräfte zwischen verschiedenartigen Teilchen und etwas schwächere gewöhnliche Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen eingeführt, die quantitativ so bemessen sind, daß sie die bekannten Streuexperimente wiedergeben. Die so berechneten Spins und magnetischen Momente sind in Einklang mit den (wenigen) experimentellen Daten; nur bei N^{14} ergibt sich eine größere Diskrepanz. Das magnetische Moment wird dort nämlich einfach dasjenige des Deuterons (0,85), während experimentell sich ein Wert $\leq 0,2$ ergibt. Ein Erklärungsversuch wird unternommen (Störung durch einen sehr benachbarten Term). — Eine durch Mitnahme der Heisenberg-Kraft zwischen verschiedenartigen Teilchen etwas veränderte Wechselwirkungsenergie ergibt nur unbedeutende Änderungen der magnetischen Momente.

S. Flügge (Leipzig).

Inglis, D. R., and L. A. Young: Stable isobars. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 525—526 (1937).

Die Verf. beschäftigen sich mit der kürzlich von Wigner (vgl. dies. Zbl. 15, 380) erörterten Frage, was der kleinste Wert der Massenzahl A bei vorgegebenem Werte

von $A - 2Z$ ist, wofür noch ein stabiles Isotop existiert ($Z = \text{Atomnummer}$). Sie zeigen, daß die Wignerschen Ergebnisse in viel einfacherer Weise abgeleitet werden können.

R. de L. Kronig (Groningen).

Lewschin, W.: An attempt at a quantum interpretation of the mirror symmetry of absorption and luminescence spectra. *Acta physicochim.* (Moskva) **6**, 213—228 (1937).

Es wird eine Erklärung der Erscheinung gesucht, daß in den Lösungen gewisser Farbstoffe die kontinuierliche Intensitätsverteilung der Lumineszenzbanden häufig das Spiegelbild der Intensitätsverteilung in den entsprechenden Absorptionsbanden in bezug auf einen bestimmten Wert der Frequenz ist.

R. de L. Kronig (Groningen).

Kuhn, H.: Pressure broadening of spectral lines and van der Waals forces. I. Influence of argon on the mercury resonance line. *Proc. Roy. Soc. London A* **158**, 212—229 (1937).

Es wird die Form einer druckverbreiterten Spektrallinie im größeren Abstand von der Linienmitte theoretisch berechnet und an der durch Argonzusatz verbreiterten Quecksilberresonanzlinie experimentell untersucht. Der Intensitätsverlauf in größerem Abstand von der Linienmitte ν_0 ist nach Kuhn u. London [*Philos. Mag.* **18**, 983 (1934); dies. Zbl. **10**, 229] allein durch die Häufigkeitsverteilung $I(\nu - \nu_0)$ der Frequenzen bestimmt, und es läßt sich daher aus $I(\nu - \nu_0)$ das Kraftgesetz bestimmen, das die Verbreiterung hervorruft. Die zu $1/r^6$ proportionale van der Waals-Kraft ($r = \text{Abstand des störenden Atoms vom strahlenden Atom}$) ruft eine mit $(\nu - \nu_0)^{-3/2}$ abfallende Intensität hervor. Dieser Abfall wurde experimentell gefunden. Die absolute Größe der Intensität ist jedoch zu klein im Vergleich mit dem Wert, der aus der van der Waals-Kraft folgt, die man nach Weisskopf [*Physik. Z.* **34**, 1 (1933); dies. Zbl. **6**, 88] aus der Stoßdämpfungsbreite entnehmen kann. Verf. erklärt dies dadurch, daß infolge der verschiedenen Einstellungsmöglichkeiten des angeregten Quecksilberatoms gegen die Stoßachse Frequenzverschiebungen verschiedenen Vorzeichens auftreten können. Da die Stoßdämpfungsbreite nur vom Absolutwert, die Intensität im Linienflügel hingegen auch vom Vorzeichen der Frequenzverschiebung abhängt, kann man die erwähnte Diskrepanz erklären.

V. Weisskopf (Kopenhagen).

Bijl, A.: Properties of the condensed phases of helium and hydrogen. *Physica* **4**, 329—344 (1937).

Um die merkwürdigen Eigenschaften von flüssigem Helium zu verstehen, wird der Fall eines Kristalles aus sehr leichten Atomen diskutiert, in dem die Nullpunktsenergie eine große Rolle spielt. Da auch dieses Problem mathematisch sehr kompliziert ist, wird es durch ein Einkörperproblem ersetzt. Es stellt sich heraus, daß die Nullpunktsbewegung einen großen Einfluß auf die Gleichgewichtslagen der Atome und auch auf die Kompressibilität hat. Aus der Kompressibilität wird die Schallgeschwindigkeit und daraus die charakteristische Temperatur für die spezifische Wärme berechnet, und die resultierenden Werte für festes Helium, Wasserstoff und Deuterium stimmen befriedigend mit der Erfahrung überein. Bei geeigneter Annahme über die potentielle Energie kann man den thermischen Ausdehnungskoeffizienten negativ machen, aber es wird offengelassen, ob dies die richtige Erklärung für den beobachteten negativen Ausdehnungskoeffizienten von flüssigem Helium ist.

R. Peierls (Cambridge).

Lennard-Jones, J. E., and A. F. Devonshire: The interaction of atoms and molecules with solid surfaces. VI. The behaviour of adsorbed helium at low temperatures. *Proc. Roy. Soc. London A* **158**, 242—252 (1937).

Die potentielle Energie eines Teilchens in der Nähe einer Kristalloberfläche wird geeignet idealisiert (vgl. dies. Zbl. **14**, 426) und die Termbänder und Eigenfunktionen für dieses Teilchen genähert angegeben. Damit läßt sich die Wanderungsgeschwindigkeit des Teilchens entlang der Oberfläche abschätzen. Für die Verhältnisse eines He-Atoms an einer LiF-Kristallfläche ist diese Beweglichkeit fast die eines freien Teilchens.

F. Hund (Leipzig).

Strachan, C.: The interaction of atoms and molecules with solid surfaces. IX. The emission and absorption of energy by a solid. *Proc. Roy. Soc. London A* 158, 591—605 (1937).

Für die Untersuchung des Energieaustausches zwischen einem Festkörper und einem adsorbierten Teilchen (vgl. dies. Zbl. 12, 46) werden jetzt auch die Fälle betrachtet, wo mehrere Schwingungsquanten ausgetauscht werden. Dadurch wird an früheren Ergebnissen nur wenig geändert.

F. Hund (Leipzig).

Masuyama, Motosaburo: Quelques remarques sur l'équation du courant électrique sous température ordinaire et basse. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 96—97 (1937).

Es wird eine Gleichung für den Verlauf des elektrischen Stromes in einem zeitabhängigen Feld vorgeschlagen, die als Spezialfälle den eines gewöhnlichen Leiters und den eines Supraleiters enthält.

R. Peierls (Cambridge).

Slater, J. C.: The nature of the superconducting state. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 195—202 (1937).

Es wird, ohne Begründung, die Vermutung ausgesprochen, daß bei Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung im Bloch'schen Metallmodell eine Reihe diskreter Zustände von dem kontinuierlichen Energiespektrum abgespalten würden, und zwar, daß diese tiefer liegen würden als der Rest des Kontinuums. Die Anzahl dieser Zustände und die Größenordnung des Energieunterschiedes werden nicht untersucht. Es wird ferner ohne Erklärung angegeben, daß die geringe Anzahl der Zustände zu einer großen elektrischen Leitfähigkeit führen sollte. Diese Zustände werden mit der Supraleitung identifiziert. Verf. gibt an, daß hiernach die Supraleitung nur bei solchen Metallen auftreten sollte, in denen die Leitungselektronen zu verschiedenen Energiebändern im Kristall gehöre, weil sonst die fraglichen Matrixelemente der Elektronenwechselwirkung verschwinden. (Hierbei ist aber nicht beachtet worden, daß die Elektronen einen Spin haben. D. Ref.) Als Prototyp eines Metalles, das nach dieser Auffassung supraleitend sein soll, wird Magnesium behandelt, von dem angegeben wird, daß es ein Supraleiter ist. (Mg ist bei den bisher erreichten Temperaturen kein Supraleiter. D. Ref.) Es wird angegeben, daß die erwähnten Tatsachen hinreichen, um alle bekannten Eigenschaften von Supraleitern zu erklären. (Dies würde jedoch nicht für den Meissner-Effekt gelten. D. Ref.)

R. Peierls (Cambridge.)

Blackman, M.: Some properties of the vibrational spectrum of a lattice. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 33, 94—103 (1937).

Das elastische Spektrum eines Kristalls wird in der Gegend niedriger Frequenzen diskutiert. In dieser Gegend ist die Dichte der Eigenschwingungen bekanntlich annähernd proportional zu $\nu^2 d\nu$. Man interessiert sich jedoch gerade für die Abweichungen von diesem Gesetz, die für die Temperaturabhängigkeit der Debye'schen Temperatur von Wichtigkeit sind. Es wird gezeigt, daß der nächste Koeffizient in der Entwicklung nach Potenzen von ν in einem Gitter vom Born-Kármán-Typus immer positiv ist, daß er jedoch im allgemeinen sowohl positiv wie negativ sein kann. — Dieser Koeffizient hängt ferner in einem Gitter mit verschiedenen schweren Atomen nicht nur von der mittleren Masse, sondern von den einzelnen Massenwerten ab.

R. Peierls.

Gombás, Paul: Zur Theorie der metallischen Bindung. IV. *Z. Physik* 104, 592—603 (1937).

Die vom Verf. entwickelte Methode wird auf die Erdalkalien angewandt und so eine angenäherte Formel für die Gitterenergie als Funktion der Gitterkonstanten erhalten. Wenn man aus dieser Formel die Gitterkonstante bestimmt, die dem Gleichgewicht entspricht, so ergibt sich, daß für verschiedene Erdalkalien die Gitterenergie mit der (-1) -ten und die Kompressibilität mit der vierten Potenz der Gitterkonstante variieren soll. Dieses Resultat stimmt angenähert mit der Erfahrung überein. Ebenso lassen sich die Absolutwerte angenähert berechnen. (III. vgl. dies. Zbl. 15, 284.)

R. Peierls (Cambridge).